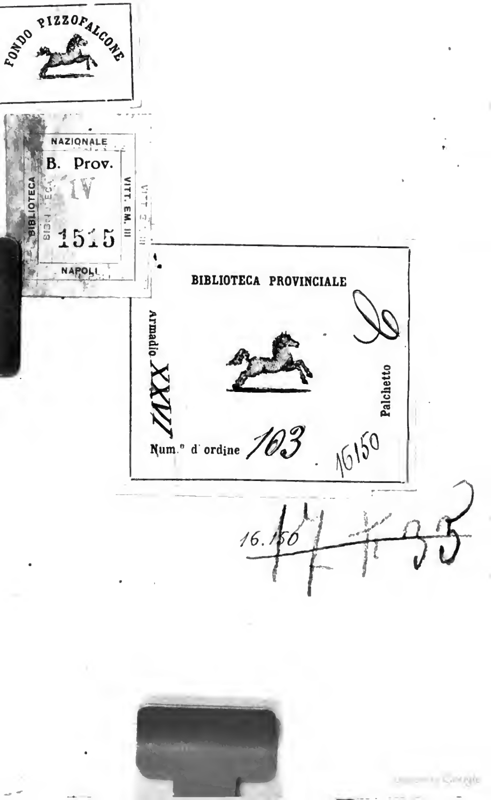






VORLESUNGEN

ÜBER

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES.



VORLESUNGEN

ÜBER

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES

INSBESONDERE

ÜBER OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

VON

Dr. OTTO HESSE,

ORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG.





LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

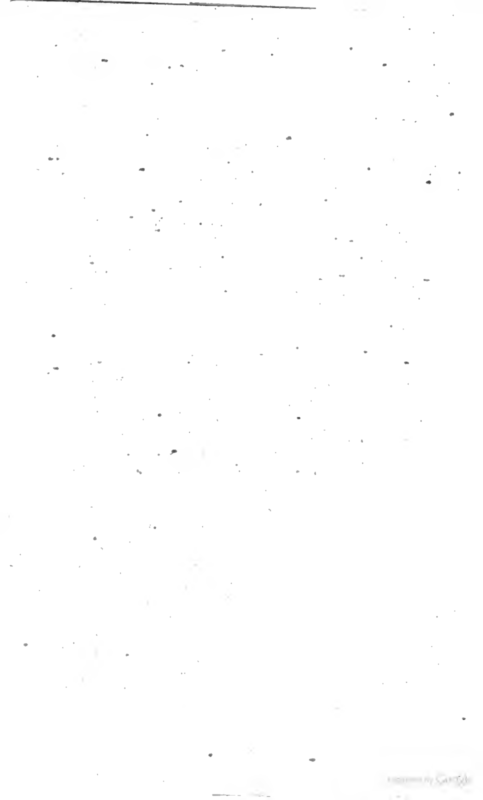
1861.

VORREDE.

Dieses Lehrbuch verdankt seine Entstehung den Universitäts-Vorträgen, welche ich in Königsberg, Halle und Heidelberg über die analytische Geometrie des Raumes gehalten habe, um meine Zuhörer in die analytisch-geometrischen Theorien einzuführen, und sie zu selbstständigen Untersuchungen in diesem Gebiete zu veranlassen.

Es setzt die Bekanntschaft des Lesers mit der Differential-Rechnung voraus. Zwar findet man am Ende der 21., 22. und 23. Vorlesung einige Integral-Formeln von Lamé und von Jacobi, jedoch lassen sich diese Stellen ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges auch übergehen. Um aus der Geometrie der Kegelschnitte nichts mehr als die Elemente vorauszusetzen, ist in der 21. Vorlesung das analytische Problem der Hauptaxen der Kegelschnitte im Zusammenhange mit den confocalen Kegelschnitten und den elliptischen Coordinaten nachgetragen worden.

Die Symmetrie neben der Dualität der Behandlungsweise, welche sich mit ihren Consequenzen durch das ganze Buch hindurchzieht, wird zur leichteren Auffassung erheblich beitragen, und dasselbe vorzugsweise als ein Lehrbuch der genannten Disciplin empfehlen.



Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Zweite Vorlesung.

Die Ebene im Raume.

Dritte Vorlesung.

Ebenen im Raume.

Vierte Vorlesung.

Das Pascal'sche Sechseck und damit verwandte Figuren.

Fünfte Vorlesung.

Der Punkt im Raume und Punkte im Raume.

Sechste Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Gerade Linien im Raume.

Siebente Vorlesung.

Determinanten.

Achte Vorlesung.

Ganze homogene Functionen.

Neunte Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.



Zehnte Vorlesung.

Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung.

Elfte Vorlesung.

Weitere allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Zwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der zehnten Vorlesung über Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. Reciprocität.

Dreizehnte Vorlesung.

Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen.

Seite.

Vierzehnte Vorlesung.

Criterium des Kegels zweiter Ordnung. Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung.

Fünfzehnte Vorlesung.

Criterium der Grenzfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche zweiter Ordnung aufgefasst.

Sechszehnte Vorlesung.

Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen.

Siebenzehnte Vorlesung.

Grenzflächen zweiter Ordnung, welche acht beliebig gegebene Ebenen berühren.

Achtzehnte Vorlesung.

Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung durch lineare homogene Substitutionen.



Neunzehnte Vorlesung.

Lineare Coordinaten-Transformation. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkt.

Zwanzigste Vorlesung.

Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung. Confocale Kegelschnitte und elliptische Coordinaten in der Ebene.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung und elliptische Raumcoordinaten.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Kürzeste Linien auf dem Ellipsoid.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Focalcurven der Oberflächen zweiter Ordnung.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Geometrische Deutung der kubischen Gleichung $\Delta = 0$, von welcher die Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängen.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Bedingungen für die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung.

Seite.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Schnitte von Oberflächen zweiter Ordnung und Ebenen. Kreisschnitte.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungscurven der Oberflächen.

Dreissigste Vorlesung.

Das Theorem von Dupin.



Berichtigungen.

1. Seite Zeile 1 v. u. ein Komma vor Lothe.
21. „ „ 3 v. o. ein Kolon nach dass.
44. „ „ 1 v. o. a'' statt des letzten a.
49. „ „ 11 v. o. Ebene statt geraden Linie.
62. „ „ 4 v. o. r statt p.
68. „ „ 3 v. u. B statt C.
79. „ „ 1 v. o. a'_1 statt des letzten a'_0.
160. „ „ 4 v. u. (5) vor f.
180. „ „ 9 v. o. zu je zweien statt je zu zweien.
195. „ „ 10 v. o. ν_1 statt ν'.
197. „ „ 3 v. u. Determinante statt Determinanten.
214. „ „ 12 v. u. , Relationen werden statt Relationen, werden.
225. „ „ 17 v. o. $a_{12}\,a_{20}\,a_{01} + a_{21}\,a_{02}\,a_{10}$ statt $2\,a_{12}\,a_{20}\,a_{01}$.
18 v. o. $a_{12}\,a_{21}$ statt a_{12}^2, $a_{20}\,a_{02}$ statt a_{02}^2, $a_{01}\,a_{10}$ statt α_{01}^2.
232. „ „ 8 v. o. ungleich statt gleich.
240. „ „ 1 v. u. α_1 statt α_2.
242. „ „ 13 v. o. Functionen statt Function.
245. „ „ 19 v. o. Semicolon statt Komma.
248. „ „ 8 v. o. Flächeninhalt statt Elächeninhalt.
249. „ „ 3 v. o. α_1 statt des letzten a_0.
253. „ „ 12 v. o. drei statt beiden.
259. „ „ 10 v. o. $=$ — statt $=$.
280. „ „ 8 v. u. Focalcurve, vorausgesetzt, dass einer auf der Focalcurve liegt. statt zweite Focalcurve.
291. „ „ 4 v. o. Oberflächen statt Oberfläche.
305. „ „ 7 v. o. Hyperbel statt Hyberbel.
321. „ „ 12 v. o. $a_{20}\,b_{12} - a_{12}\,b_{20}$ statt $a_{01}\,b_{20} - a_{20}\,b_{01}$.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Die Aufgabe der analytischen Geometrie ist eine vierfache. Sie lehrt erstens gegebene Figuren durch Gleichungen ersetzen, zweitens transformirt sie diese Gleichungen in Formen, die sich für die geometrische Deutung eignen, drittens vermittelt sie den Uebergang von den transformirten oder gegebenen Gleichungen zu den ihnen entsprechenden Figuren. Da die transformirten Gleichungen aber aus den durch die Figur gegebenen Gleichungen folgen, so ist auch das geometrische Bild der transformirten Gleichungen, das ist eine zweite Figur, eine Folge der gegebenen. Diese Folgerung einer zweiten Figur aus einer gegebenen nennt man einen geometrischen Satz. Sie lehrt also viertens mit Hülfe des Calculs auch geometrische Sätze folgern.

Als Hülfsmittel zu den genannten Zwecken dient das Coordinaten-System von Cartesius. Im engeren Sinne versteht man darunter drei auf einander senkrecht stehende feste Ebenen, Coordinaten-Ebenen. Die Schnittlinien je zweier von ihnen heissen Coordinaten-Axen. Der den drei Coordinaten-Axen gemeinschaftliche Punkt wird der Anfangs-Punkt des Systemes genannt.

Die drei von einem gegebenen Punkte auf die Coordinaten-Ebenen gefällten Lothe, Coordinaten des Punktes, sind durch die Lage des Punktes bestimmt. Umgekehrt wird die Lage des Punktes durch diese Lothe unzweideutig bestimmt sein, wenn nicht allein die Grösse, sondern auch die Richtung dieser, den Coordinatenaxen parallelen Lothe gegeben ist.

Um die Richtung der genannten Lothe zu definiren, denke man sich, dass jede der drei Coordinatenaxen aus zwei vom Coordinatenanfangspunkte nach entgegengesetzten Richtungen ausgehenden Strahlen zusammengesetzt sei. Die eine, gleichviel welche, wird als die positive, die andere als die negative Richtung der Coordinatenaxe angenommen. So oft nun eines der drei Lothe der Richtung der ihm parallelen Cordinatenaxe entgegengesetzt ist, erhält es das positive Vorzeichen, im anderen Falle das negative. Nach diesen Festsetzungen hat jeder Punkt des Raumes seine bestimmten Coordinaten, und jede drei reellen Grössen können als die Coordinaten eines bestimmten Punktes angesehen werden.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume bezeichnet man mit den Buchstaben x, y, z. Die ihnen parallelen Coordinatenaxen werden respective die x Axe, die y Axe, die z Axe genannt. Die Coordinatenebenen endlich werden durch zwei der genannten Buchstaben bezeichnet nach den Coordinatenaxen, welche in ihnen liegen.

Man kann aber die Coordinaten eines gegebenen Punktes noch auf eine zweite Art bestimmen, die in manchen Fällen den Vorzug verdient vor der angegebenen Bestimmungsweise. Fällt man nämlich drei Perpendikel von dem gegebenen Punkte auf die drei Coordinatenaxen, so sind die Abschnitte auf den Coordinatenaxen vom Anfangspunkte des Systems gerechnet den Coordinaten des Punktes gleich, wenn man festsetzt, dass diese Abschnitte positiv zu nehmen sind auf der positiven Seite der Axen, dagegen negativ auf der negativen Seite. Es steht daher auch frei diese Abschnitte als die Coordinaten des Punktes zu betrachten.

Sind demnach a, b, c die Coordinaten eines gegebenen Punktes im Raume, so sind die drei Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

der analytische Ausdruck des Punktes, und umgekehrt ist ein ganz bestimmter Punkt des Raumes das geometrische Bild für diese 3 Gleichungen in der Voraussetzung, dass a, b, c gegebene reelle Grössen bedeuten. Dieser Punkt liegt in der yz Ebene wenn $a = o$, er liegt in der z Axe wenn $a = b = o$, er ist endlich der Anfangspunkt des Coordinatensystems wenn $a = b = c = o$.

Wenn also ein bestimmter Punkt im Raume das geometrische Bild ist jener drei Gleichungen, so drängt sich zunächst die Frage auf, welches das geometrische Bild sei einer dieser Gleichungen, zum Beispiel der Gleichung:

$$x = a.$$

Die Coordinaten x, y, z aller Punkte, die in einer der yz Ebene parallelen und von ihr um den Abstand a entfernten Ebene liegen, genügen dieser Gleichung und umgekehrt alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, liegen in der genannten Ebene. Aus diesem Grunde wird die angegebene Gleichung die Gleichung jener Ebene genannt. Sie ist der analytische Ausdruck für die Ebene, weil die Coordinaten aller Punkte in ihr der Gleichung genügen, und die Ebene ist das geometrische Bild der Gleichung, weil alle Punkte, deren Coordinaten der Gleichung genügen, in der genannten Ebene liegen. In dieser Weise sind $y = b$ und $z = c$ die Gleichungen zweier Ebenen, die von den Coordinatenebenen zx und xy um b und c abstehen und ihnen parallel sind.

Die Coordinaten aller Punkte der Schnittlinie der beiden Ebenen $y = b$ und $z = c$ genügen zugleich den beiden Gleichungen:

$$y = b, \quad z = c$$

und umgekehrt alle Punkte, deren Coordinaten den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, liegen in jener Linie. Diese beiden Gleichungen sind daher der analytische Ausdruck für jene Linie und umgekehrt. Die angegebenen beiden Gleichungen nennt man daher die Gleichungen der geraden Linie, in welcher sich die beiden Ebenen schneiden.

Wenn man diese Betrachtungen ausdehnt, so sieht man, dass eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes das Aequivalent ist für eine räumliche Fläche, Oberfläche; dass zwei Gleichungen derselben Art eine Curve, die Schnittcurve der beiden Oberflächen darstellen, von denen jede durch eine der genannten Gleichungen ausgedrückt ist; dass endlich drei Gleichungen analytisch diejenigen Punkte darstellen, in welchen sich die drei durch die drei Gleichungen ausgedrückten Oberflächen schneiden.

Die Coordinaten eines Punktes sind auch unzweideutig durch irgend drei lineare Gleichungen zwischen diesen Coordinaten bestimmt. Die geometrische Bedeutung einer dieser linearen Gleichungen ist die zunächst liegende Frage, deren Beantwortung in der nächstfolgenden Vorlesung erfolgen soll, nachdem wir einige Fundamental-Sätze und -Aufgaben vorausgeschickt haben, die hier und in der analytischen Geometrie überhaupt von häufiger Anwendung sind.

(1) . . . Die senkrechte Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine unbegrenzte andere ist gleich der begrenzten geraden Linie multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider geraden Linien.

Wenn man von den Endpunkten einer begrenzten geraden Linie Lothe fällt auf eine unbegrenzte, so ist das zwischen den Fusspunkten der Lothe liegende Stück der unbegrenzten geraden Linie die senkrechte Projection der ersteren. Im Falle der eine Begrenzungspunkt der ersteren in der unbegrenzten geraden Linie liegt, ist der angegebene Satz nichts anderes als der Ausdruck der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Hypothenuse und den eingeschlossenen Winkel. Um den Satz auf diesen Fall zurückzuführen, lege man zwei Ebenen durch die Endpunkte der begrenzten geraden Linie, senkrecht gegen die unbegrenzte gerade Linie. Das zwischen diesen Ebenen liegende Stück der unbegrenzten geraden Linie wird die gesuchte senkrechte Projection sein. Ihr gleich sind alle durch die beiden Ebenen begrenzten Stücke der mit der unbegrenzten Linie parallelen Linien. Wählt man aber unter diesen parallelen Linien gerade die, welche durch einen Endpunkt der begrenzten Linie geht, und nimmt für die senkrechte Projection das von den beiden Ebenen begrenzte Stück dieser Linie, so hat man den erwähnten Fall. Denn man nennt Neigungswinkel zweier gegebenen geraden Linien, die sich nicht schneiden, den Winkel, der durch zwei gerade Linien gebildet wird, die den gegebenen parallel von ein und demselben Punkte ausgehen. Das sind hier die begrenzte gerade Linie und die mit der unbegrenzten parallelele Linie, welche durch den einen Endpunkt der ersteren geht.

(2) ... **Die senkrechte Projection einer begrenzten Ebene auf eine unbegrenzte andere ist ihrem Flächeninhalte nach gleich dem Flächeninhalte der begrenzten Ebene multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen.**

Wenn man von sämmtlichen Begrenzungspunkten einer begrenzten Ebene Lothe fällt auf eine andere unbegrenzte Ebene, so begrenzen die Fusspunkte der Lothe eine Figur in der unbegrenzten Ebene, die man die senkrechte Projection der begrenzten Ebene nennt. Da man jede begrenzte Ebene durch gerade Linien in Dreiecke zertheilen kann, die als die Elemente der begrenzten Ebene zu betrachten sind, so braucht man den angegebenen Satz nur für ein Dreieck nachzuweisen, selbst nur für ein Dreieck, dessen Grundlinie der unbegrenzten Ebene parallel ist. Denn das Dreieck lässt sich noch durch eine, durch eine Ecke desselben gelegte mit der unbegrenzten Ebene parallele Linie in zwei Elementardreiecke zerlegen, deren gemeinschaftliche Grundlinie der unbegrenzten Ebene parallel ist.

Ein solches Elementardreieck hat aber mit seiner senkrechten Projection gleiche Grundlinie und die Projection der Höhe ist die Höhe des projicirten Dreiecks. Die projicirte Höhe ist aber nach (1) gleich der Höhe des Elementardreiecks multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Höhen d. i. des Neigungswinkels beider Ebenen. Vergleicht man daher die Flächeninhalte des Elementardreiecks und seiner Projection ausgedrückt durch Grundlinie und Höhe, so hat man den angegebenen Satz für das Elementardreieck. Nimmt man aber statt des Elementardreiecks die Summe aller Elementardreiecke und statt der Projection des Elementardreiecks die Summe der Projectionen der Elementardreiecke, so ergiebt sich der oben angegebene Satz.

(3) ... **Wenn α, β, γ die Winkel sind, die eine gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet, oder eine Ebene mit den Coordinatenebenen, so ist:**

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Eine Ebene bildet mit drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen dieselben Neigungswinkel als das Loth der Ebene

mit den drei auf einander senkrecht stehenden Schnittlinien je zweier von den drei Ebenen. Nach diesem Fundamentalsatze aus der Stereometrie braucht man den angegebenen Satz nur für eine gerade Linie nachzuweisen. Er gilt dann auch für eine Ebene.

Da alle parallelen Linien dieselben Winkel mit den Coordinatenaxen bilden, so kann man annehmen, dass die gerade Linie, von welcher der angegebene Satz handelt, durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht. Schneidet man nun auf dieser vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes in der Richtung, in welcher sie mit den positiven Coordinatenaxen die genannten Winkel bildet, ein Stück ab, welches gleich der Einheit ist, und legt durch den Begrenzungspunkt des Stückes drei den Coordinatenebenen parallele Ebenen, so schliessen diese und die drei Coordinatenebenen ein Parallelepipedum ein, dessen Diagonale der Einheit gleich ist. In einem rechtwinkligen Parallelepipedum ist aber das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei von einer Ecke auslaufenden Kanten. Die Kanten des Parallelepipedums, welche von dem Anfangspunkt des Coordinatensystemes ausgehen, sind aber die Cosinusse der Neigungswinkel der Diagonale mit ihnen. Hiernach ist der zu beweisende Satz nichts anderes als der analytische Ausdruck des oben angeführten Satzes der Stereometrie.

(4) . . . **Die Entfernung D zweier durch ihre Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 gegebenen Puncte wird durch die Gleichung bestimmt:**

$$D^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Die senkrechten Projectionen der beiden Punkte auf die Coordinatenaxen begrenzen auf denselben Stücke, die den Coordinaten dieser Punkte gleich sind. Es sind demnach:

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1$$

die senkrechten Projectionen der Verbindungslinie D der beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte. Nach Satz (1) kann man diese Projectionen auch ausdrücken durch:

$$D \cos\alpha, \quad D \cos\beta, \quad D \cos\gamma,$$

wenn α, β, γ die Winkel bedeuten, die die Linie D mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat daher:

$$D \cos\alpha = x - x_1, \quad D \cos\beta = y - y_1, \quad D \cos\gamma = z - z_1.$$

Quadrirt man diese Gleichungen, so erhält man durch Addition mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (4).

(5) ... **Wenn Δ den Flächeninhalt einer begrenzten ebenen Figur und A, B, C die Flächeninhalte der senkrechten Projectionen derselben bedeuten auf die drei Coordinatenebenen, so ist:**

$$\Delta^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Denn man hat nach (2):

$$\Delta \cos\alpha = A, \quad \Delta \cos\beta = B, \quad \Delta \cos\gamma = C,$$

wenn α, β, γ die Neigungswinkel sind der Ebene, in welcher die begrenzte Figur liegt, zu den Coordinatenebenen. Quadrirt man aber diese Gleichungen und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (5).

Wenn man drei auf einander senkrecht stehende Ebenen durch irgend eine vierte schneidet, so schliessen die vier Ebenen eine dreiseitige rechtwinklige Pyramide ein. Von den sie begrenzenden Dreiecken nennt man das in der vierten Ebene liegende das Hypothenusendreieck, die drei anderen die Kathetendreiecke. Letztere sind die senkrechten Projectionen des Hypothenusendreiecks auf die drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen. Man hat daher den Satz:

„In einer dreiseitigen rechtwinkligen Pyramide ist das Quadrat „des Hypothenusendreiecks gleich der Summe der Quadrate der „Kathetendreiecke".

(6) ... **Wenn α, β, γ die Neigungswinkel sind, die eine gerade Linie im Raume mit den Coordinatenaxen bildet, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die entsprechenden Neigungswinkel einer anderen geraden Linie, und v der Winkel, den die beiden geraden Linien mit einander bilden, so ist:**

$$\cos v = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1.$$

Da es sich nur um die Richtung der geraden Linie handelt, so kann man annehmen, dass beide gerade Linien von dem Coordinatenanfangspunkt ausgehen. Trägt man auf jede derselben in

der Richtung, in der sie die genannten Winkel mit den positiven Coordinatenaxen bilden, ein Stück gleich der Einheit auf, und verbindet die Endpunkte dieser Stücke durch eine gerade Linie; so hat man ein gleichschenkliges Dreieck. Das Quadrat der ungleichen Seite D dieses Dreiecks, deren Endpunkte die Coordinaten haben $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, lässt sich in doppelter Weise ausdrücken. Einmal nach Satz (4) wie folgt:

$$D^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2$$

das andere Mal durch die beiden Seiten des Dreiecks und den von ihnen eingeschlossenen Winkel v:

$$D^2 = 2 - 2\cos v.$$

Setzt man diese beiden Werthe von D^2 einander gleich, so erhält man mit Rücksicht auf (3) die Gleichung (6).

Quadrirt man die Gleichung (6) und zieht beide Seiten der Gleichung von der Einheit ab, so erhält man:

$$\sin^2 v = 1 - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$\sin^2 v = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2,$$

welche Gleichung sich leicht in die elegantere Form bringen lässt:

$$(7) \quad \sin^2 v = (\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta)^2.$$

Alle Theile dieser Gleichung haben eine geometrische Bedeutung, mit deren Berücksichtigung sich die Gleichung auch aus (5) herleiten lässt.

Man denke sich zu diesem Zwecke ein Dreieck in der xy Ebene, dessen Spitze in dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt. Die Coordinaten der beiden anderen Ecken des Dreiecks seien x, y und x_1, y_1. In dieser Voraussetzung findet man den doppelten Inhalt, $2\varDelta$, des Dreiecks:

$$(8) \quad 2\varDelta = xy_1 - x_1 y.$$

Die senkrechte Projection des vorhin erwähnten gleichschenkligen Dreiecks auf die xy Ebene ist ein Dreieck, dessen Spitze im Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt. Die Coordinaten der beiden anderen Ecken sind: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$. Es ist daher $2C = \cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta$ der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks. Die doppelten Flächeninhalte $2A$, $2B$, $2C$ der senkrechten Projectionen des gleichschenkligen Dreiecks auf die drei Coordinatenebenen sind daher:

$$2A = \cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma,$$
$$2B = \cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha,$$
$$2C = \cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta,$$

während der doppelte Inhalt 2Δ des gleichschenkligen Dreiecks selbst ist:

$$2\Delta = \sin v.$$

(9). . . **Den körperlichen Inhalt Π einer dreiseitigen Pyramide zu bestimmen, wenn die Kanten r, r_1, r_2 gegeben sind, die in einer Ecke der Pyramide zusammenstossen, und die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, die diese Kanten einschliessen.**

Der doppelte Inhalt der Grundfläche der Pyramide, gebildet von den beiden Kanten r, r_1, die den Winkel α_2 einschliessen, ist:

$$r r_1 \sin\alpha_2.$$

Die Höhe der Pyramide ist:

$$r_2 \sin\alpha_1 \sin A,$$

wenn A der Neigungswinkel der beiden Seitenflächen der Pyramide ist, welche sich in der Kante r schneiden. Man hat daher:

$$6\Pi = r r_1 r_2 \sin A \sin\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

Es bleibt noch übrig den Sinus des Neigungswinkels A der beiden Seitenflächen der Pyramide auszudrücken durch die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$. Zu diesem Zwecke beschreibe man um die in Rede stehende Ecke der Pyramide als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $= 1$. Auf der Kugeloberfläche schneiden die drei in dem Mittelpunkte der Kugel zusammenlaufenden Seitenflächen der Pyramide ein sphärisches Dreieck ab, dessen Seiten sind $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, von denen die beiden letzteren α_1 und α_2 den Winkel A einschliessen. Alsdann hat man:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos A.$$

Setzt man den durch diese Gleichung bestimmten Werth von $\cos \varDelta$ ein in:

$$6\Pi = r\,r_1\,r_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sqrt{(1 - \cos^2\varDelta)},$$

so erhält man:

$$(10) \ldots 6\Pi = r\,r_1\,r_2 \sqrt{\left\{\begin{matrix} 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 \\ + 2\cos\alpha \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \end{matrix}\right\}}.$$

Man kann diese Gleichung auch in folgende elegantere Form bringen:

$$(11) \ldots 6\Pi = 2.r\,r_1\,r_2 \sqrt{\left\{\begin{matrix} \sin\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2} \cdot \sin\frac{-\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2} \\ \sin\frac{\alpha-\alpha_1+\alpha_2}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\alpha_1-\alpha_2}{2} \end{matrix}\right\}},$$

woraus man den bekannten Ausdruck für den doppelten Inhalt eines ebenen Dreiecks erhält, gebildet von den Seiten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, wenn man annimmt, dass diese Seiten unendlich klein und $r = r_1 = r_2 = 1$. Denn man hat unter dieser Voraussetzung eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche das ebene Dreieck und deren Höhe $= 1$.

Die angegebenen Ausdrücke für den 6fachen Inhalt der dreiseitigen Pyramide beweisen zugleich folgenden Satz:

(12) ... Zwei dreiseitige Pyramiden, welche zwischen denselben in einer Ecke zusammenstossenden Kanten beschrieben werden, sind ihrem körperlichen Inhalte nach einander gleich, wenn das Product der drei Kanten in der einen Pyramide gleich ist dem Product der entsprechenden Kanten in der anderen Pyramide.

(13) ... Den körperlichen Inhalt einer dreiseitigen Pyramide zu bestimmen, deren Spitze in dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes liegt, während die übrigen Ecken durch ihre Coordinaten gegeben sind.

Wir beginnen die Auflösung dieser Aufgabe mit der Darstellung des Inhaltes $\varDelta$ eines in der xy Ebene gelegenen Dreiecks durch die Coordinaten seiner Ecken. Legt man in eine der Ecken des Dreiecks den Anfangspunkt eines neuen dem ersteren parallelen Coordinatensystems und bezeichnet in diesem die Coordinaten der beiden anderen Ecken des Dreiecks mit $\xi_2\,\eta_2$ und $\xi_3\,\eta_3$, so hat man nach (8):

$$2\varDelta = \xi_2\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_2.$$

Sind nun die gegebenen Coordinaten der drei Ecken des Dreiecks in dem ursprünglichen Coordinatensystem respective:

$$A_1\,B_1,\quad A_2\,B_2,\quad A_3\,B_3,$$

so hat man:

$$\xi_2 = A_2 - A_1,\quad \xi_3 = A_3 - A_1,$$
$$\eta_2 = B_2 - B_1,\quad \eta_3 = B_3 - B_1.$$

Setzt man diese Werthe in den für den doppelten Inhalt des Dreiecks angegebenen Ausdruck, so erhält man:

$$(14)\ \ldots\ 2\,\Delta = (A_2\,B_3 - A_3\,B_2) + (A_3\,B_1 - A_1\,B_3) + (A_1\,B_2 - A_2\,B_1).$$

Denkt man sich nun die von der Spitze auslaufenden Kanten der gegebenen dreiseitigen Pyramide durch eine der xy Ebene parallele Ebene so geschnitten, dass diese Ebene eine neue Pyramide begrenzt von demselben körperlichen Inhalte als die gegebene, und nimmt an, dass die Ecken der neuen Pyramide die Coordinaten haben $A_1\,B_1\,C_1$, $A_2\,B_2\,C_2$, $A_3\,B_3\,C_3$, wobei zu bemerken ist, dass:

$$C_1 = C_2 = C_3,$$

so hat man:

$$6\,\Pi = (A_2\,B_3 - A_3\,B_2)\,C_1 + (A_3\,B_1 - A_1\,B_3)\,C_2 + (A_1\,B_2 - A_2\,B_1)\,C_3.$$

Die drei von der Spitze ausgehenden Kanten der gegebenen Pyramide seien r_1, r_2, r_3, die ihnen entsprechenden Kanten der zweiten Pyramide seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Alsdann hat man folgende Relationen:

$$A_1 = \frac{\varrho_1}{r_1}\,X_1,\quad A_2 = \frac{\varrho_2}{r_2}\,X_2,\quad A_3 = \frac{\varrho_3}{r_3}\,X_3,$$

$$B_1 = \frac{\varrho_1}{r_1}\,Y_1,\quad B_2 = \frac{\varrho_2}{r_2}\,Y_2,\quad B_3 = \frac{\varrho_3}{r_3}\,Y_3,$$

$$C_1 = \frac{\varrho_1}{r_1}\,Z_1,\quad C_2 = \frac{\varrho_2}{r_2}\,Z_2,\quad C_3 = \frac{\varrho_3}{r_3}\,Z_3,$$

wenn $X_1\,Y_1\,Z_1$, $X_2\,Y_2\,Z_2$, $X_3\,Y_3\,Z_3$ die Coordinaten der drei Ecken der gegebenen Pyramide bedeuten.

Setzt man diese Werthe für die verschiedenen Grössen A, B, C in den gefundenen Ausdruck von $6\,\Pi$ und berücksichtigt, dass nach (12) $r_1\,r_2\,r_3 = \varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3$, weil die beiden Pyramiden der Voraussetzung nach gleichen Inhalt haben, so erhält man:

$$(15)\ \ldots\ 6\Pi = (X_2\,Y_3 - X_3\,Y_2)\,Z_1 + (X_3\,Y_1 - X_1\,Y_3)\,Z_2 + (X_1\,Y_2 - X_2\,Y_1)\,Z_3.$$

(16) . . . **Den körperlichen Inhalt Π irgend eines Tetraeders durch die Coordinaten der vier Ecken auszudrücken.**

Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Denn wählt man ein Coordinatensystem dem vorigen parallel, in Rücksicht auf welches die Coordinaten der Spitze der dreiseitigen Pyramide sind x, y, z und die Coordinaten der übrigen Ecken $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, so hat man folgende Relationen:

$$X_1 = x_1 - x, \quad X_2 = x_2 - x, \quad X_3 = x_3 - x,$$

(17) . . . . $$Y_1 = y_1 - y, \quad Y_2 = y_2 - y, \quad Y_3 = y_3 - y,$$

$$Z_1 = z_1 - z, \quad Z_2 = z_2 - z, \quad Z_3 = z_3 - z.$$

Man braucht nur diese Werthe (17) in (15) einzusetzen, um den gesuchten Ausdruck für den 6fachen Inhalt des Tetraeders zu erhalten, ausgedrückt durch die Coordinaten der vier Ecken: 0, 1, 2, 3.

Um eine Einsicht in diesen weiten Ausdruck von 6Π zu erhalten, der vollständig entwickelt 24 Glieder umfasst, von welchen die eine Hälfte das positive, die andere das negative Vorzeichen haben, gehen wir zurück auf den analog gebildeten Ausdruck (14) für den doppelten Inhalt des Dreiecks. Derselbe ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei Ecken des Dreiecks mit einander vertauscht. Daher giebt die Gleichung (14) nicht den absoluten Werth des doppelten Inhaltes 2Δ des Dreiecks, sondern sie giebt den doppelten Inhalt des Dreiecks mit dem positiven oder negativen Vorzeichen je nach der Bezeichnung der Ecken. Dasselbe gilt auch von (8) und (15). Dasselbe gilt auch von dem Ausdruck des 6fachen Inhalts des Tetraeders durch die Coordinaten der Ecken. Dieser Ausdruck ändert nämlich sein Vorzeichen, wenn man zwei von den drei Ecken 1, 2, 3 mit einander vertauscht. Da die gelöste Aufgabe (16) aber eine symmetrische ist in Rücksicht auf alle vier Ecken des Tetraeders, so wird auch das Resultat ein symmetrisches sein müssen, in der Art, dass, was von zwei bestimmten Ecken gilt, auch für irgend zwei gelten muss. Vertauscht man also in dem erwähnten Ausdrucke von 6Π die Coordinaten irgend zweier von den vier Ecken des Tetraeders, so ändert derselbe nur sein Vorzeichen.

Dieser Ausdruck von 6Π ist ferner linear in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 1, ebenso in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 2 oder 3. Obwohl er scheinbar von der dritten Ordnung ist in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes 0, so wird er in der Entwickelung auch in Rücksicht auf diese Coordinaten linear sein müssen. Er ist also linear in Rücksicht auf die Coordinaten einer, gleichviel welcher, Ecke des Tetraeders.

Denkt man sich die drei Ecken 1, 2, 3 des Tetraeders gegeben, die Ecke 0 aber variabel, so verschwindet 6Π jedes Mal, wenn die variable Ecke in die durch 1, 2, 3 gelegte Ebene fällt. Umgekehrt wenn 6Π verschwindet, so liegt die variable Ecke in der genannten Ebene. Es ist demnach:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6\Pi = o$$

der analytische Ausdruck, die Gleichung, der Ebene, die durch die drei gegebenen Punkte hindurchgeht, und umgekehrt, ist die genannte Ebene das geometrische Bild jener Gleichung.

Die Gleichung jeder Ebene stellt sich hiernach als eine lineare dar, in der Form:

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad Ax + By + Cz + D = o.$$

Es entsteht aber die Frage, ob auch jeder Gleichung von dieser Form als geometrisches Bild derselben eine Ebene im Raume entspricht. Diese Frage würde man dadurch beantworten können, dass man nachwiese, wie jeder lineare Ausdruck der Coordinaten mit einem zu bestimmenden Factor multiplicirt sich auf die angegebene Form 6Π zurückführen lässt. Allein da der Ausdruck 6Π nicht einfach genug ist, so werden wir den angedeuteten Weg zur Beantwortung der angeregten Frage verlassen, indem wir sie in der folgenden Vorlesung von einem anderen Gesichtspunkte aus wieder aufnehmen.

Zweite Vorlesung.

Die Ebene im Raume.

Wenn man in irgend einem Punkte einer gegebenen Ebene auf derselben zwei gleich grosse Lothe nach den entgegengesetzten Seiten von der Ebene errichtet, so ist es eine charakteristische Eigenschaft eines beliebigen Punktes p der Ebene, dass die Entfernungen dieses Punktes von den Endpunkten q, q' der beiden Lothe einander gleich sind. Denn von keinem andern Punkte ausserhalb der Ebene gilt dasselbe. Drückt man daher diese Eigenschaft durch eine Gleichung aus, so wird man die Gleichung der Ebene haben.

Der Kürze wegen kann man annehmen, dass der Punkt q' der Anfangspunkt sei des Coordinatensystemes, welches zum Grunde gelegt wird. In dieser Voraussetzung erhält man den Punkt q, indem man vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes auf die gegebene Ebene ein Perpendikel fällt und dieses Perpendikel um sich selbst über die Ebene hinaus verlängert. Der Endpunkt q dieser Verlängerung habe die Coordinaten a, b, c, der beliebige Punkt p der Ebene habe die Coordinaten x, y, z. Drückt man nun die Gleichung $(pq)^2 = (pq')^2$ durch die gegebenen Coordinaten der Punkte nach (4) der ersten Vorlesung aus, so erhält man die Gleichung der Ebene:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

welche auf folgende zurückführt:

$$(2) \quad ax + by + cy - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = o.$$

Man ersieht hieraus, dass jede Ebene durch eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes in ihr ausgedrückt wird.

Es ist aber auch umgekehrt jede lineare Gleichung:

$$(3) \quad Ax + By + Cz + D = o$$

der analytische Ausdruck einer Ebene im Raume. Diese Behauptung wird sich dadurch rechtfertigen, dass man nachweiset, wie die Gleichung (3) auf die Form (2) gebracht werden kann.

Denn da (2) wieder auf (1) zurückführt, so wird man die auf (1) zurückgeführte Gleichung (3) als den Ausdruck jener charakteristischen Eigenschaft der Ebene auffassen können.

Multiplicirt man die Gleichung (3) mit einem noch unbestimmten Factor μ und setzt die Coefficienten gleicher Variabeln in den Gleichungen (2) und (3) einander gleich, so erhält man folgende vier Gleichungen zwischen den vier Unbekannten μ, a, b, c:

$$\mu A = a, \quad \mu B = b, \quad \mu C = c, \quad -\mu D = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

woraus man durch Auflösung nach den Unbekannten erhält:

$$\mu = \frac{-2D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$a = \frac{-2DA}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$b = \frac{-2DB}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$c = \frac{-2DC}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Hiernach führt die mit dem Factor μ multiplicirte Gleichung (3) zurück auf (2), in welcher a, b, c die angegebenen Werthe haben, und die Gleichung (2) schliesslich auf (1).

Die Gleichung (3) mit den willkürlichen Constanten A, B, C, D wird die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene genannt zum Unterschiede von der zunächst folgenden, die in vielen Fällen grosse Vortheile gewährt.

Auf die eben angedeutete Form gelangt man, wenn man in (2) statt der Coordinaten des Punktes q die Winkel α, β, γ einführt, welche das vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes gefällte Loth mit den Coordinatenaxen bildet, und den senkrechten Abstand δ der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt. Projicirt man zu diesem Zwecke die Verbindungslinie des Coordinatenanfangspunktes und des Punktes q auf die Coordinatenaxen, so erhält man die Coordinaten des Punktes q, oder nach (1) der ersten Vorlesung:

$$a = 2\delta \cos\alpha, \quad b = 2\delta \cos\beta, \quad c = 2\delta \cos\gamma.$$

Setzt man diese Werthe von a, b, c in (2), so erhält man mit Rücksicht auf (3) der ersten Vorlesung:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0.$$

Diese Form der Gleichung wird die **Normalform der Gleichung der Ebene** genannt. In ihr bedeuten α, β, γ die Winkel, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen oder, was dasselbe ist, die Winkel, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen bildet, und δ den senkrechten Abstand der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt, der immer positiv angenommen wird.

(5) .... **Die gegebene Gleichung einer Ebene in der allgemeinen Form ist zurückzuführen auf die Normalform, oder, was dasselbe ist, die Winkel sind zu bestimmen, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, und der senkrechte Abstand der Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt.**

Wenn (3) und (4) die Gleichungen derselben Ebene sind, so können diese Gleichungen sich nur durch einen Factor von einander unterscheiden. Multiplicirt man daher die Gleichung (3) mit einem Factor μ, so wird sich derselbe so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (3) und (4) Glied für Glied übereinstimmen. Man hat daher:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -\delta.$$

Aus diesen vier Gleichungen kann man mit Zuziehung der bekannten Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ die 5 Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ berechnen und erhält:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\delta = \frac{-D}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\mu = \frac{-1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Da δ in der Gleichung (4) als eine positive Grösse betrachtet wird, so hat man der Quadratwurzelgrösse $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$

in allen Formeln das entgegengesetzte Vorzeichen von D zuzuertheilen. Zu bemerken ist hier noch der Factor $\mu = \frac{-1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$, durch welchen die allgemeine Form (3) der Gleichung der Ebene auf die Normalform (4) zurückgeführt wird.

Man kann noch folgende Form der Gleichung einer Ebene hervorheben:

$$(6) \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1 = o,$$

die bemerkenswerth ist wegen der einfachen Bedeutung der Constanten m, n, p in ihr. Man erkennt nämlich leicht, dass diese Grössen die von der Ebene auf den Coordinatenaxen abgeschnittenen Stücke ausdrücken.

Da nach (5) die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, unter welcher auch die Form (6) begriffen ist, sich auf die einfachste Weise auf die Normalform zurückführen lässt, so kann man ohne der Allgemeinheit der Betrachtungen Eintrag zu thun, letztere als die gegebene betrachten, wie in folgender Aufgabe:

(7) . . . Den senkrechten Abstand Δ eines durch seine Coordinaten X, Y, Z gegebenen Punktes P von einer durch ihre Gleichung in der Normalform gegebenen Ebene zu ermitteln.

Da man den senkrechten Abstand des Coordinatenanfangspunktes von der Ebene nach (5) unter allen Umständen als positiv zu betrachten hat, so wird der senkrechte Abstand eines Punktes von der gegebenen Ebene positiv oder negativ sein, je nachdem dieser Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Ebene, oder auf der entgegengesetzten liegt. Nimmt man daher, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, dass der Punkt P mit dem Coordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der durch ihre Gleichung:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = o$$

gegebenen Ebene liege, und legt eine Ebene parallel der gegebenen durch den Punkt P, so wird ihre Gleichung:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta' = o,$$

indem δ' den senkrechten Abstand dieser Ebene von dem Coordinatenanfangspunkt bedeutet; und da der Punkt P in ihr liegt, so hat man:

$$X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma - \delta' = o.$$

Der senkrechte Abstand Δ des Punktes P von der Ebene ist:

$$\Delta = \delta - \delta'.$$

Setzt man in diese Gleichung für δ' den Werth aus der vorhergehenden, so erhält man:

$$-\Delta = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma - \delta.$$

Dieses Resultat lässt sich in Worten also wiedergeben:

(8) . . . Wenn man den linken Theil einer in der Normalform (4) gegebenen Gleichung einer Ebene von ihrem rechten Theile, der $= 0$ ist, trennt, so drückt jener den negativen senkrechten Abstand des durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punktes von der Ebene aus.

Darauf gestützt kann man die Bedingung leicht angeben, unter welcher ein Punkt p von zwei gegebenen Ebenen gleich weit absteht. Denn bezeichnet man mit den Symbolen A und A_1 die Ausdrücke:

$$(9) \quad \ldots \quad A \equiv x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta,$$
$$A_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - \delta_1,$$

so sind $-A$ und $-A_1$ die senkrechten Abstände des durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punktes p von den beiden gegebenen Ebenen $A = o$ und $A_1 = o$. Mithin ist:

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A - A_1 = o$$

die gesuchte Bedingung. Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene. Daher beschreibt der Punkt p, dessen senkrechte Abstände von zwei gegebenen Ebenen gleich sind, wieder eine Ebene. Nun weiss man aber, dass der geometrische Ort des Punktes p die Ebene ist, welche den Neigungswinkel halbirt, den die gegebenen Ebenen mit einander bilden. Mithin ist die Gleichung (10) die Gleichung dieser Halbirungsebene.

Ebenso erhält man die Bedingung für den Punkt p, dessen senkrechte Abstände von den beiden gegebenen Ebenen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A + A_1 = o.$$

Dieses ist die Gleichung derjenigen Ebene, welche den zweiten von den gegebenen Ebenen gebildeten Neigungswinkel halbirt. Die beiden Ebenen (10) und (11) stehen auf einander senkrecht.

Man braucht daher nur die Gleichungen zweier Ebenen auf diese Form zurückzuführen, um dadurch nachzuweisen, dass die Ebenen in einem vorliegenden Falle auf einander senkrecht stehen. Die gemachten Bemerkungen fassen wir aber als Satz also:

(12) . . . Wenn $A = o$ und $A_1 = o$ die Gleichungen zweier gegebenen Ebenen in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = o$ und $A + A_1 = o$ die Gleichungen der Ebenen, welche die Neigungswinkel der gegebenen Ebenen halbiren.

Die Gleichungen der beiden Ebenen (10) und (11), welche durch die Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen $A = o$ und $A_1 = o$ hindurchgehen, sind zusammmengesetzt aus diesen beiden Gleichungen. Diese Bemerkung lässt sich erweitern durch folgenden Satz:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen dreier Ebenen in irgend einer Form $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$ die Identität obwaltet:

$$kU + k_1 U_1 + k_2 U_2 \equiv o,$$

so schneiden sich die drei Ebenen in ein und derselben geraden Linie.

Denn auf Grund dieser Identität verschwindet U_2 für alle Werthe der Variabeln, welche den Gleichungen $U = o$ und $U_1 = o$ zugleich genügen, das ist für die Coordinaten aller Punkte in der Schnittlinie der beiden Ebenen $U = o$ und $U_1 = o$; welches eben beweiset, dass sämmtliche Punkte der Schnittlinie in der Ebene $U_2 = o$ liegen.

Dehnt man diesen Satz noch weiter aus, so erhält man folgenden:

(14) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von vier Ebenen in irgend welcher Form $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$, $U_3 = o$ die Identität statt findet:

$$kU + k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 \equiv o,$$

so schneiden sich die vier Ebenen in ein und demselben Punkte.

Für die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$ werden diese Gleichungen zugleich erfüllt. Setzt man die Werthe dieser Coordinaten in die Identität,

so sieht man, dass auch der Gleichung $U_2 = o$ genügt wird, das heisst, der Schnittpunkt liegt in der Ebene $U_2 = o$.

Diese beiden Sätze bieten die Mittel, auf eine leichte Art nachzuweisen, dass gewisse Ebenen sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, oder dass gewisse Ebenen durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, wie dieses in den folgenden Betrachtungen klar hervortreten wird.

Es seien die Gleichungen von irgend drei Ebenen in der Normalform gegeben:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o.$$

Diese Ebenen zertheilen den Raum in 8 Fächer, von welchen wir das Fach ins Auge fassen wollen, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt. Die Halbirungsebenen der Neigungswinkel von je zwei Ebenen in dem Fache stellen sich nach (12) also dar:

$$A_1 - A_2 = o, \quad A_2 - A_0 = o, \quad A_0 - A_1 = o.$$

Da die Summe der linken Theile dieser Gleichungen identisch gleich 0 ist, so folgt hieraus nach (13), dass die sie darstellenden drei Ebenen sich in ein und derselben geraden Linie schneiden.

Um diesem Satze eine bequemere Fassung zu geben, beschreibe man eine Kugel um den Schnittpunkt P der gegebenen drei Ebenen als Mittelpunkt mit dem Radius $= 1$, und projicire die 6 Ebenen auf die Kugeloberfläche. Die drei gegebenen Ebenen, welche das Fach bilden, schneiden dann auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck ab, und die Projectionen der drei anderen Ebenen auf die Kugeloberfläche, welche die Winkel des Dreiecks halbiren, haben nach dem Vorhergehenden die Eigenschaft, welche der folgende Satz angiebt:

Die grössten Kreise, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, schneiden sich in ein und demselben Punkte.

Wenn man annimmt, dass das sphärische Dreieck nur einen unendlich kleinen Theil der Kugeloberfläche umfasse, so kann man dasselbe als ein ebenes betrachten und den angegebenen Satz auf ein ebenes Dreieck übertragen.

Die Gleichungen der drei Ebenen, welche die äusseren Neigungswinkel des Faches halbiren, sind nach (12)

$$A_1 + A_2 = o, \quad A_2 + A_0 = o, \quad A_0 + A_1 = o.$$

Stellt man die linken Theile der beiden ersten Gleichungen zusammen mit dem linken Theile der dritten vorhin angegebenen Gleichung, so bemerkt man, dass

$$(A_1 + A_2) - (A_2 + A_0) + (A_0 - A_1) \equiv o,$$

woraus wie vorhin durch Uebertragung auf die Kugeloberfläche der Satz hervorgeht:

- Die Halbirungslinien zweier äusserer und des dritten inneren Winkels eines sphärischen Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Satz ist von dem vorhergehenden eigentlich nicht verschieden. Denn betrachtet man das sphärische Dreieck, welches von den Verlängerungen zweier Seiten und der dritten Seite des gegebenen Dreiecks gebildet wird, so sind die Halbirungslinien der inneren Winkel dieses Dreiecks die Halbirungslinien zweier äusseren und eines inneren Winkels des gegebenen Dreiecks. Man kann ihn aber auch auf die Ebene übertragen, in welchem Falle er in der That eine neue Eigenschaft des Dreiecks erkennen lässt.

Betrachten wir endlich die durch die folgenden vier Gleichungen analytisch dargestellten Ebenen:

$$A_0 + A_1 + A_2 = o,$$
$$-A_0 + A_1 + A_2 = o,$$
$$A_0 - A_1 + A_2 = o,$$
$$A_0 + A_1 - A_2 = o,$$

so ist aus (14) ersichtlich, dass diese vier Ebenen sämmtlich durch den Punkt P gehen. Die erste von diesen Ebenen geht nach (13) durch die Schnittlinie von $A_0 = o$ und $A_1 + A_2 = o$, ebenso durch die Schnittlinie von $A_1 = o$ und $A_2 + A_0 = o$ und die Schnittlinie von $A_2 = o$ und $A_0 + A_1 = o$. Es ist also eine bemerkenswerthe Eigenschaft dieser drei Schnittlinien, dass sie auf ein und derselben Ebene liegen. Ebenso liegen auf der zweiten Ebene die Schnittlinien der Ebenenpaare $A_0 = o$ und $A_1 + A_2 = o$, $A_1 = o$ und $A_2 - A_0 = o$, $A_2 = o$ und $A_0 - A_1 = o$. Die analogen Eigenschaften der beiden letzten Ebenen ergeben sich hiernach von selbst. Uebertragen, wie vorhin, auf die Kugeloberfläche, drücken diese Eigenschaften folgende Sätze aus:

Die Halbirungslinien der drei äusseren Winkel eines sphärischen Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einem grössten Kreise liegen.

Die Halbirungslinien zweier inneren Winkel und des dritten äusseren Winkels eines sphärischen Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, die auf einem grössten Kreise liegen.

Diese Sätze kann man wieder auf das ebene Dreieck übertragen.

Sätze auf der Kugeloberfläche lassen sich leicht verdoppeln durch Anwendung eines Principes, welches wir das **Princip der Kugel** nennen wollen und welches sich stützt auf die Bemerkungen:

(15) . . . **Die Pole der grössten Kreise auf der Kugeloberfläche, welche sich in ein und demselben Punkte schneiden, liegen auf einem grössten Kreise, und die grössten Kreise, deren Pole auf ein und demselben grössten Kreise liegen, schneiden sich in einem Punkte. Der Bogen eines grössten Kreises, der die Pole zweier grössten Kreise verbindet, ist gleich dem Neigungswinkel der beiden grössten Kreise.**

Denn beschreibt man zu einer auf der Kugeloberfläche gegebenen Figur die Polarfigur, welche entsteht, indem man für jeden grössten Kreis der gegebenen Figur den Pol und für jeden Punkt der gegebenen Figur den grössten Kreis nimmt, dessen Pol der Punkt ist, so werden Eigenschaften der gegebenen Figur nach den gemachten Bemerkungen entsprechende Eigenschaften der Polarfigur zur Folge haben. Da aber die Polarfigur der Polarfigur wieder die gegebene Figur ist, so braucht man nur die Polarfigur als gegeben zu betrachten und die entsprechenden Eigenschaften an ihrer Polarfigur nachzuweisen, um den Beweis der Eigenschaften der gegebenen Polarfigur zu führen.

Nach diesem Uebertragungsprincip ergeben sich aus den angegebenen vier Sätzen auf der Kugeloberfläche folgende:

Die Halbirungspunkte der Complemente der Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen auf einem grössten Kreise.

Die Halbirungspunkte zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks und der Halbirungspunkt des Complementes der dritten Seite liegen auf einem grössten Kreise.

Die Verbindungskreise der Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich in einem Punkte.

Die Verbindungskreise der Mitten der Complemente zweier Seiten des sphärischen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken und der Verbindungskreis der Mitte der dritten Seite mit der gegenüberliegenden Ecke schneiden sich in einem Punkte.

Von diesen vier Sätzen der Kugeloberfläche lässt sich nur der vorletzte in der oben angedeuteten Weise auf das ebene Dreieck übertragen.

Um die angestellten Betrachtungen zu erweitern, nehme man an, dass die Seitenflächen eines Tetraeders durch ihre Gleichungen in der Normalform gegeben seien:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o, \quad A_3 = o.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Coordinatenanfangspunkt innerhalb des Tetraeders liege, sind dann die Gleichungen der die Neigungswinkel der Seitenflächen halbirenden Ebenen:

$$A_0 - A_1 = o, \quad A_1 - A_2 = o, \quad A_2 - A_3 = o$$
$$A_0 - A_2 = o, \quad A_1 - A_3 = o,$$
$$A_0 - A_3 = o,$$

und die Gleichungen der die äusseren Neigungswinkel halbirenden Ebenen:

$$A_0 + A_1 = o, \quad A_1 + A_2 = o, \quad A_2 + A_3 = o.$$
$$A_0 + A_2 = o, \quad A_1 + A_3 = o,$$
$$A_0 + A_3 = o,$$

Da aus den drei in der ersten Horizontalreihe aufgeführten Gleichungen die drei übrigen des ersten Systemes folgen, so hat man nach (14) den Satz:

Die 6 Halbirungsebenen der Neigungswinkel der Seitenflächen eines Tetraeders schneiden sich in ein und demselben Punkte.

Es ist dieser Punkt der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.

Es schneiden sich aber auch folgende Ebenen in ein und demselben Punkte:

$$A_0 - A_1 = o, \quad A_0 + A_3 = o,$$
$$A_1 - A_2 = o, \quad A_1 + A_3 = o,$$
$$A_2 - A_0 = o, \quad A_2 + A_3 = o,$$

woraus der Satz entspringt:

Die Halbirungsebenen der Neigungswinkel der drei Seitenflächen eines Tetraeders, welche eine Ecke bilden, und die Halbirungsebenen der drei gegenüberliegenden äusseren Neigungswinkel der Seitenflächen schneiden sich in ein und demselben Punkte.

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der äusseren Berührungskugel des Tetraeders.

Die 16 aufgeführten Ebenen bilden eine Figur im Raume, an der sich mit Hülfe der Sätze (13) und (14) auf dem angedeuteten Wege leicht noch andere Eigenschaften entdecken lassen.

Dritte Vorlesung.

Ebenen im Raume.

Wenn man durch die Schnittlinie zweier durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebenen Ebenen 0, 1:

(1) . . . . $A_0 = o, \quad A_1 = o$

und durch einen Punkt P, dessen senkrechte Abstände von den beiden Ebenen sich verhalten wie die gegebenen Grössen $a_0 : a_1$, eine Ebene legt; so theilt jeder Punkt dieser Ebene mit dem

Punkte P die Eigenschaft, dass die senkrechten Abstände sich wie die gegebenen Grössen verhalten.

Die Bedingung, dass die senkrechten Abstände $-A_0$ und $-A_1$ eines durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punktes von den gegebenen Ebenen 0, 1 sich verhalten, wie $a_0 : a_1$:

$$(2) \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = o$$

wird hiernach die Gleichung jener durch die Schnittlinie gelegten Ebene sein.

Verändert man die Lage des Punktes P nach Belieben, so dreht sich die Ebene um die Schnittlinie, und erhält nach und nach alle Lagen, die eine durch jene Schnittlinie gelegte Ebene annehmen kann. Die Gleichung (2) stellt also jede beliebige Ebene 2 dar, die durch die Schnittlinie der Ebenen 0 und 1 hindurchgeht. Sie erhält die Gestalt:

$$(3) \quad A_0 - \lambda A_1 = o,$$

wenn man setzt $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$, und dieser Factor λ hat in der Voraussetzung, dass (20) und (21) die Neigungswinkel bedeuten, welche die Ebene 2 mit 0 und 1 bildet, die geometrische Bedeutung:

$$(4) \quad \lambda = \frac{\sin(20)}{\sin(21)}.$$

Eine andere Ebene 3, die ebenfalls durch die Schnittlinie der Ebenen 0 und 1 hindurchgeht, hat zur Gleichung:

$$(5) \quad A_0 - \mu A_1 = o.$$

Das Verhältniss:

$$(6) \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(20)}{\sin(21)} : \frac{\sin(30)}{\sin(31)}$$

zwischen den Sinus der Neigungswinkel heisst das anharmonische Verhältniss des Ebenenpaares 2 und 3 zu dem Ebenenpaare 0 und 1.

Allgemeiner stellen sich die Gleichungen von vier Ebenen, die sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, also dar:

$$(7) \quad V_0 = o, \quad V_1 = o, \quad V_0 - lV_1 = o, \quad V_0 - mV_1 = o,$$

wenn man annimmt, dass die beiden ersten Gleichungen in der allgemeinen Form gegeben seien. Um das anharmonische Ver-

hältniss zu finden, braucht man nur die beiden ersten Gleichungen auf die Normalform zurückzuführen, indem man setzt: $V_0 = \varrho_0 A_0$, $V_1 = \varrho_1 A_1$, wodurch die angegebenen vier Gleichungen übergehen in:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_0 - l\frac{\varrho_0}{\varrho_1}A_1 = o, \quad A_0 - m\frac{\varrho_0}{\varrho_1}A_1 = o$$

und woraus sich das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ ergiebt.

Noch allgemeiner ist die folgende Aufgabe:

> Gegeben sind die Gleichungen von vier Ebenen, die sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, in der Form:

$$(8) \quad \ldots \quad U_0 - \lambda U_1 = o, \quad U_0 - \mu U_1 = o, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = o, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = o,$$

> das anharmonische Verhältniss des letzten Ebenenpaares zu dem ersten zu bestimmen.

Setzt man $U_0 - \lambda U_1 = V_0$, $U_0 - \mu U_1 = V_1$, und drückt U_0 und U_1 durch V_0 und V_1 aus, so stellen sich die gegebenen vier Gleichungen in der Form (7) dar, woraus das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ erhalten wird:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}.$$

Das anharmonische Verhältniss wird zu einem harmonischen Verhältniss, wenn dasselbe den Werth -1 annimmt. Man erhält daher die Bedingung, welche zu erfüllen ist, wenn zwei Paare Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie gehen, harmonische Ebenenpaare sein sollen, aus (6):

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin(20)}{\sin(21)} + \frac{\sin(30)}{\sin(31)} = o,$$

oder, wenn die Gleichungen der Ebenen in der Form (7) gegeben sind, $m = -l$; weshalb sich die Gleichungen von zwei harmonischen Ebenenpaaren darstellen in der Form:

$$(11) \quad \ldots \quad V_0 = o, \quad V_1 = o. \quad V_0 - lV_1 = o, \quad V_0 + lV_1 = o.$$

Man erkennt hieraus, dass von zwei harmonischen Ebenenpaaren drei Ebenen, die durch dieselbe gerade Linie gehen, beliebig gewählt werden können, dass durch sie aber die vierte harmonische Ebene bestimmt ist. Nimmt man an, dass das erste Ebenenpaar gegeben sei, dass die dritte Ebene aber sich um die

Schnittlinie der beiden ersten drehe, so kann man sich durch Discussion der Gleichung (10) für specielle Fälle leicht eine Vorstellung bilden von der Lage von zwei harmonischen Ebenenpaaren zu einander. Halbirt zum Beispiel die dritte Ebene den Neigungswinkel des gegebenen Ebenenpaares, so halbirt die vierte harmonische Ebene den anderen Winkel, den das gegebene Ebenenpaar einschliesst. Nähert sich die dritte Ebene einer der gegebenen Ebenen, so dass sie nahe zu mit ihr zusammenfällt, so fällt auch die vierte harmonische Ebene nahe zu mit ihr zusammen.

Sind die Gleichungen von zwei Ebenenpaaren, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, in der Form (8) gegeben, so erhält man die Bedingung, dass diese beiden Ebenenpaare harmonisch seien, indem man den Ausdruck (9) gleich -1 setzt; woraus die Bedingungsgleichung für zwei harmonische Ebenenpaare (8) hervorgeht:

$$(12) \quad \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Auch diese Gleichung liefert den Beweis, dass von zwei harmonischen Ebenenpaaren drei Ebenen die vierte unzweideutig bestimmen.

Da durch ein gegebenes Ebenenpaar das ihm zugeordnete harmonische Ebenenpaar nicht vollständig bestimmt ist, so werden zwei gegebene Ebenenpaare dazu erforderlich sein, was die Auflösung der folgenden Aufgabe bestätigen wird.

(13) . . . Dasjenige Ebenenpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist zu zwei Paar Ebenen, die sich in derselben geraden Linie schneiden.

Es seien die Gleichungen der beiden gegebenen Ebenenpaare:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = 0, \qquad U_0 - \mu_1 U_1 = 0,$$

und die Gleichung des gesuchten Ebenenpaares:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0,$$
$$U_0 - \mu U_1 = 0,$$

dieses letztere ist harmonisch zu jedem der gegebenen Ebenenpaare unter folgenden Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Da in diese Gleichungen das Product $\lambda\mu$ und die Summe $\lambda+\mu$ der Unbekannten in linearer Weise eingehen, so kann man ihre Werthe unzweideutig berechnen, und daraus eine quadratische Gleichung bilden, deren Wurzeln die Unbekannten selbst sind.

Die angestellte Untersuchung lehrt, dass es immer ein bestimmtes Ebenenpaar giebt, welches harmonisch ist zu zwei gegebenen Ebenenpaaren, die durch dieselbe gerade Linie gehen. Dieses Ebenenpaar ist reell oder imaginär, je nachdem die Wurzeln der erwähnten quadratischen Gleichung reell oder imaginär sind.

Drei Paare Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, bilden eine Involution, wenn ein viertes Ebenenpaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Ebenenpaare.

Zwei gegebene Ebenenpaare, die durch dieselbe gerade Linie gehen, bestimmen, wie man gesehen hat, dasjenige Ebenenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Ebenenpaare. Ein drittes zu dem letzteren harmonisches Ebenenpaar wird also mit den beiden gegebenen eine Involution bilden. Da aber von diesem dritten Ebenenpaare eine Ebene beliebig durch jene gerade Linie gelegt werden kann, wodurch erst die andere bestimmt ist, so sieht man, dass von drei Ebenenpaaren der Involution fünf durch ein und dieselbe gerade Linie gehende Ebenen beliebig gewählt werden können, dass die sechste aber durch sie bestimmt ist.

Zwischen drei Paaren Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, wird daher eine Bedingungsgleichung stattfinden müssen, wenn die Ebenenpaare eine Involution bilden sollen.

(14) . . . Es sind die Gleichungen von drei Paar Ebenen gegeben, welche durch dieselbe gerade Linie gehen:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = o, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = o, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = o,$$
$$V_0 - \mu_0 V_1 = o, \quad V_0 - \mu_1 V_1 = o, \quad V_0 - \mu_2 V_1 = o,$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher diese drei Ebenenpaare eine Involution bilden.

Bilden die angegebenen drei Ebenenpaare eine Involution, so hat man nach der Definition ein Ebenenpaar:

$$V_0 - \lambda V_1 = o,$$
$$V_0 - \mu V_1 = o,$$

welches zu jedem derselben harmonisch ist; was zutrifft unter den Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)\ (\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = o,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)\ (\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = o,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)\ (\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 = o.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$, welche linear darin vorkommen, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung, der man leicht folgende Form geben kann:

$$(15)\ \ldots\ (\lambda_0 - \mu_1)\ (\lambda_1 - \mu_2)\ (\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)\ (\mu_1 - \lambda_2)\ (\mu_2 - \lambda_0) = o.$$

Wenn man in dieser Gleichung setzt $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und zugleich $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$, so geht dieselbe über in die Bedingungsgleichung für vier harmonische Ebenen, die man erhält, indem man den Ausdruck (9) gleich -1 setzt. Aus dieser Bemerkung fliesst der Satz:

Wenn von drei Ebenenpaaren der Involution das eine Ebenenpaar mit einer Ebene, ein zweites Ebenenpaar mit einer zweiten Ebene zusammenfallen, so ist das dritte Ebenenpaar der Involution harmonisch zu den beiden Ebenen.

Jede drei Paare Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie gehen, lassen sich analytisch auch so darstellen:

$$A_0 = o, \quad A_0 - \lambda_1 A_1 = o, \quad A_0 - \lambda_2 A_1 = o,$$
$$A_1 = o, \quad A_0 - \mu_1 A_1 = o, \quad A_0 - \mu_2 A_1 = o,$$

indem man annimmt, $A_0 = o$ und $A_1 = o$ seien die Gleichungen des ersten Ebenenpaares in der Normalform. Die Bedingung, unter welcher diese drei Ebenenpaare eine Involution bilden, erhält man aus (15), wenn man setzt: $\lambda_0 = o$, $\mu_0 = \infty$, nämlich:

$$\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 = o.$$

Erinnert man sich aber der geometrischen Bedeutung der Grössen $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, so kann man diese Gleichung auch so darstellen, wenn man mit 0, 1 das erste, mit 2, 3 das zweite und mit 4, 5 das dritte Ebenenpaar bezeichnet:

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sin 20}{\sin 21} \cdot \frac{\sin 30}{\sin 31} - \frac{\sin 40}{\sin 41} \cdot \frac{\sin 50}{\sin 51} = o.$$

Diese Gleichung kann als Definition der eine Involution bildenden Ebenen dienen. Man erhält aus ihr noch zwei andere Relationen, indem man das Ebenenpaar 0, 1 mit 2, 3 oder mit 4, 5 vertauscht, die aber durch diese bedingt werden.

Wenn man die Gleichungen $V_0 = o$ und $V_1 = o$ des Ebenenpaares zu Grunde legt, welches harmonisch ist zu jedem der drei Ebenenpaare, die eine Involution bilden, so stellen sich die drei Ebenenpaare der Involution in der Form dar:

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{array}{lll} V_0 - \lambda_0 V_1 = o, & V_0 - \lambda_1 V_1 = o, & V_0 - \lambda_2 V_1 = o, \\ V_0 + \lambda_0 V_1 = o, & V_0 + \lambda_1 V_1 = o, & V_0 + \lambda_2 V_1 = o, \end{array}$$

auf welche Form sich jede drei Ebenenpaare der Involution zurückführen lassen müssen.

Um in symmetrischer Weise die Gleichungen von drei Ebenenpaaren der Involution durch drei Symbole darzustellen, setze man:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0}, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1}.$$

Alsdann hat man die identische Gleichung:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_0 + U_1 + U_2 \equiv o$$

und die Gleichungen (17) nehmen die Form an:

$$(19) \quad \ldots \quad \begin{array}{lll} U_0 = o, & U_1 = o, & U_2 = o, \\ \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = o, & \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = o, & \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = o, \end{array}$$

wenn man mit μ_0, μ_1, μ_2 die Ausdrücke bezeichnet:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0, \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1, \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2.$$

Da die Grössen μ_0, μ_1, μ_2 eben so willkürlich sind als die Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, so werden die Ebenenpaare eine Involution bilden, wenn man unter der Bedingung (18), welche ausdrückt, dass die Ebenen U_0, U_1, U_2 sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, ihren Gleichungen die Form (19) geben kann.

Um noch neben den Relationen (16) zwischen den Sinus der Neigungswinkel der Ebenen der Involution andere abzuleiten, die alle eine Folge sein müssen der einen unter (16) aufgeführ-

ten Gleichung, führe man für die Ebenen U_0, U_1, U_2 ihre Normalformen ein, indem man setzt:

$$\varrho_0 U_0 = A_0, \quad \varrho_1 U_1 = A_1, \quad \varrho_2 U_2 = A_2,$$

wodurch die Gleichungen (18) und (19) übergehen in:

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} = o.$$

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \begin{array}{ccc} A_0 = o, & A_1 = o, & A_2 = o. \\ \frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} - \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} = o, & \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} - \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} = o, & \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} - \frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} = o. \end{array}$$

Bezeichnet man die drei letzten Ebenen respective mit B_0, B_1, B_2 und erinnert sich der geometrischen Bedeutung der Grössen:

$$\frac{\mu_1\varrho_1}{\mu_2\varrho_2} = \frac{\sin B_0A_1}{\sin B_0A_2}, \quad \frac{\mu_2\varrho_2}{\mu_0\varrho_0} = \frac{\sin B_1A_2}{\sin B_1A_0}, \quad \frac{\mu_0\varrho_0}{\mu_1\varrho_1} = \frac{\sin B_2A_0}{\sin B_2A_1},$$

so erhält man durch Multiplication dieser Gleichungen:

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad 1 = \frac{\sin B_0A_1 \cdot \sin B_1A_2 \cdot \sin B_2A_0}{\sin B_0A_2 \cdot \sin B_1A_0 \cdot \sin B_2A_1},$$

woraus sich durch Vertauschung von A_0 mit B_0, oder von A_1 mit B_1 oder von A_2 mit B_2 noch drei andere Gleichungen ableiten lassen, von denen jede als Definition dienen kann der Ebenen der Involution.

Die angestellten Betrachtungen bieten ein Mittel die am Ende der vorhergehenden Vorlesung entwickelten Sätze weiter auszudehnen. Denn nehmen wir an, dass:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o$$

die Gleichungen von irgend drei Ebenen seien in der Normalform, die sich in einem Punkte P schneiden, oder, was dasselbe ist, die drei von einem Punkte P ausgehende gerade Linien paarweise verbinden, so sind:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = o, \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_0}{a_0} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = o$$

die Gleichungen von drei Ebenen, die eine vierte von P ausgehende gerade Linie immer mit einer der drei ersteren verbinden. Die angegebenen Gleichungen stellen mithin drei Ebenen-

paare dar, die vier beliebige von einem Punkte P ausgehende gerade Linien paarweise verbinden.

Die Uebereinstimmung dieser drei Gleichungspaare zwischen welchen aber im Allgemeinen nicht die identische Gleichung (20) obzuwalten braucht, mit (21), beweiset, dass drei Ebenenpaare der Involution ein specieller Fall sind von drei Ebenenpaaren, welche vier von ein und demselben Punkte ausgehende gerade Linien paarweise verbinden. Denn lässt man die vier von ein und demselben Punkte ausgehenden geraden Linien nahezu in eine zusammenfallen, so wird nahezu auch die Gleichung (20) erfüllt, das heisst, nahezu alle Bedingungen für die Ebenen der Involution.

Bezeichnet man die drei letzten Ebenen respective mit B_0, B_1, B_2, so hat man in gleicher Weise zwischen den Neigungswinkeln der drei Ebenenpaare allgemein die Relation (22), sowie die drei anderen Relationen, welche aus ihr gefolgert wurden.

Lässt man den Punkt P in das Unendliche fallen, so werden die vier von ihm ausgehenden geraden Linien vier beliebige parallele Linien, und zwischen den Sinus der Neigungswinkel der drei Ebenenpaare, welche diese Linien paarweise verbinden, findet die Gleichung (22) statt. Da diese Gleichung aber die Bedingung ist für Ebenen der Involution, so wird man solche erhalten, wenn man durch eine gegebene gerade Linie sechs Ebenen legt, welche parallel sind mit drei Ebenenpaaren, welche irgend vier mit der gegebenen geraden Linie parallele Linien paarweise verbinden. Diese Bemerkung giebt ein Mittel an die Hand zu fünf beliebig durch ein und dieselbe gerade Linie gehende Ebenen die sechste Ebene der Involution zu bestimmen.

Durch jede der drei Schnittlinien der Ebenen A_0, A_1, A_2 gehen drei Ebenen der beschriebenen Raumfigur. Die vierten harmonischen Ebenen haben zu Gleichungen:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = o, \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = o.$$

Da nun zwischen den linken Theilen dieser und der vorhergehenden Gleichungen identische Relationen sattfinden wie:

$$\left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) - \left(\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0}\right) + \left(\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1}\right) = o,$$

so hat man nach (13) des vorhergehenden Abschnittes einen Satz.

Um diesem Satze eine elegante Fassung zu geben, projicire man die beschriebene Raumfigur von dem Punkte P als Mittelpunkt einer Kugel von dem Radius 1 auf die Oberfläche dieser Kugel. Nennt man dann harmonische grösste Kreise der Kugeloberfläche solche, deren Ebenen harmonische Ebenen sind, so begrenzen die Ebenen A_0, A_1, A_2 ein sphärisches Dreieck, von welchem der Satz erwiesen ist:

Wenn man von einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche grösste Kreise zieht nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks, und in jeder Ecke den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneiden sich zwei von den letzteren Kreisen in einem Punkte, durch welchen auch der durch die dritte Ecke des Dreiecks und den beliebigen Punkt gelegte grösste Kreis geht.

Aehnliche Betrachtungen angestellt an folgenden Gleichungen:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0,$$

$$-\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0,$$

$$\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0,$$

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0,$$

wie in der vorhergehenden Vorlesung an den entsprechenden Gleichungen, in denen $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, führen zu den Sätzen:

Wenn man von irgend einem Punkte der Kugeloberfläche nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks grösste Kreise zieht, und in jeder Ecke den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneiden letztere die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, die auf einem grössten Kreise liegen.

Wenn man von einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks drei grösste Kreise zieht und in einer Ecke des Dreiecks den vierten harmonischen grössten Kreis construirt, so schneidet dieser die gegenüberliegende,

Seite des Dreiecks in einem Punkte. Die von dem beliebigen Punkte nach den beiden anderen Ecken des Dreiecks gezogenen grössten Kreise schneiden die Gegenseiten des Dreiecks in zwei Punkten. Diese drei Schnittpunkte liegen auf einem grössten Kreise.

Dieser Satz ist besonders wichtig, weil er lehrt auf lineare Weise, das heisst durch Zuziehung allein von grössten Kreisen, zu drei von einem Punkte ausgehenden grössten Kreisen den vierten harmonischen zu finden; oder, was dasselbe ist, zu drei Ebenen, welche sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, die vierte harmonische Ebene ohne weitere Hülfe als von Ebenen zu construiren.

Es bleibt noch übrig einen Satz zu entwickeln, der in linearer Weise zu fünf Ebenen, die sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, die sechste Ebene der Involution construiren lehrt. Diesem Zwecke wird die folgende Betrachtung entsprechen.

Es seien wie vorhin die Gleichungen von drei Ebenen, die sich in einem Punkte P schneiden:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o.$$

Eine vierte beliebig durch den Punkt P gelegte Ebene E stellt sich analytisch unter der Form dar:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = o.$$

Dass dieses die Gleichung einer durch P gehenden Ebene ist, ist nach (14) der vorhergehenden Vorlesung ausser Zweifel. Dass diese Ebene aber im Uebrigen beliebig ist, beweiset man auf folgende Art.

Eine beliebige durch den Punkt P gehende Ebene E schneidet die Ebene A_0 in einer durch P gehenden geraden Linie p. Die Gleichung der Ebene, welche durch p und die Schnittlinie von A_1 und A_2 hindurchgeht, stellt sich unter der Form dar: $\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = o$. Da diese Ebene aber die Ebene $A_0 = o$ in der geraden Linie p schneidet, und $\frac{A_0}{a_0} + \left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) = o$ mit dem willkürlichen Divisor a_0 alle Ebenen darstellt, welche durch die gerade Linie p hindurchgehen, so lässt sich dieser Divisor immer so bestimmen, dass die zuletzt angegebene Gleichung der beliebigen durch P gelegten Ebene entspricht.

Demnach stellen sich die Gleichungen von drei Ebenen, die durch eine beliebige durch P gehende gerade Linie q und durch die Schnittlinien der Ebenen A_0, A_1, A_2 gelegt sind, also dar:

$$\frac{A_1}{\lambda_1}-\frac{A_2}{\lambda_2}=o,\quad \frac{A_2}{\lambda_2}-\frac{A_0}{\lambda_0}=o,\quad \frac{A_0}{\lambda_0}-\frac{A_1}{\lambda_1}=o.$$

Die Gleichungen der drei Ebenen aber, welche durch q und durch die Schnittlinien der Ebene E mit den Ebenen A_0, A_1, A_2 gelegt werden, sind folgende:

$$\frac{a_1}{\lambda_1}\left(\frac{A_2}{\lambda_2}-\frac{A_0}{\lambda_0}\right)-\frac{a_2}{\lambda_2}\left(\frac{A_0}{\lambda_0}-\frac{A_1}{\lambda_1}\right)=o,$$

$$\frac{a_2}{\lambda_2}\left(\frac{A_0}{\lambda_0}-\frac{A_1}{\lambda_1}\right)-\frac{a_0}{\lambda_0}\left(\frac{A_1}{\lambda_1}-\frac{A_2}{\lambda_2}\right)=o,$$

$$\frac{a_0}{\lambda_0}\left(\frac{A_1}{\lambda_1}-\frac{A_2}{\lambda_2}\right)-\frac{a_1}{\lambda_1}\left(\frac{A_2}{\lambda_2}-\frac{A_0}{\lambda_0}\right)=o.$$

Denn diese Gleichungen haben auch die Form:

$$\frac{a_1 a_2}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}\right)-\frac{A_0}{\lambda_0}\left(\frac{a_1 a_2\lambda_0}{\lambda_1\lambda_2 a_0}+\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}\right)=o,$$

$$\frac{a_2 a_0}{\lambda_2\lambda_0}\left(\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}\right)-\frac{A_1}{\lambda_1}\left(\frac{a_2 a_0\lambda_1}{\lambda_2\lambda_0 a_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_0}{\lambda_0}\right)=o,$$

$$\frac{a_0 a_1}{\lambda_0\lambda_1}\left(\frac{A_0}{a_0}+\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}\right)-\frac{A_2}{\lambda_2}\left(\frac{a_0 a_1\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 a_2}+\frac{a_0}{\lambda_0}+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)=o.$$

Setzt man nun:

$$\frac{A_1}{\lambda_1}-\frac{A_2}{\lambda_2}=U_0,\quad \frac{A_2}{\lambda_2}-\frac{A_0}{\lambda_0}=U_1,\quad \frac{A_0}{\lambda_0}-\frac{A_1}{\lambda_1}=U_2,$$

so hat man zuerst die identische Gleichung:

$$U_0+U_1+U_2\equiv o$$

und die sechs durch die gerade Linie q gelegten Ebenen stellen sich unter der Form dar:

$$U_0=o,\qquad U_1=o,\qquad U_2=o,$$

$$\frac{a_1}{\lambda_1}U_1-\frac{a_2}{\lambda_2}U_2=o,\quad \frac{a_2}{\lambda_2}U_2-\frac{a_0}{\lambda_0}U_0=o,\quad \frac{a_0}{\lambda_0}U_0-\frac{a_1}{\lambda_1}U_1=o.$$

Diese sechs Ebenen bilden, wie der Vergleich mit (18) und (19) lehrt, eine Involution.

Ueberträgt man diesen Satz auf die Kugeloberfläche, so lautet er also:

Wenn man einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche durch sechs grösste Kreise verbindet mit den sechs Schnittpunkten von irgend vier grössten Krei-

sen, so bilden die sechs Verbindungskreise eine Involution.

Man nennt vier gerade Linien, welche in derselben Ebene von ein und demselben Punkte ausgehen, harmonische Linien, wenn zwischen den von ihnen eingeschlossenen Winkeln die Bedingungsgleichung (10) stattfindet. Es bilden ferner drei in derselben Ebene von einem Punkte ausgehende Linienpaare eine Involution von sechs geraden Linien, wenn zwischen den von ihnen eingeschlossenen Winkeln die Bedingungsgleichung (22) obwaltet. Dieses vorausgesetzt, kann man die angegebenen vier Sätze der Kugeloberfläche, indem man annimmt, dass die Figuren, von welchen sie handeln, nur einen sehr kleinen Theil der Kugeloberfläche umfassen, auf die Ebene übertragen.

Harmonische Linien von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehend auf die Kugeloberfläche projicirt, werden harmonische Punkte der Kugeloberfläche genannt. Zwischen den Bogen grösster Kreise, welche sie verbinden, findet die Bedingungsgleichung (10) statt, welche zugleich als Definition der harmonischen Punkte der Kugeloberfläche dient.

Ebenso schneiden sechs von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehende gerade Linien der Involution die Kugeloberfläche in sechs Punkten der Involution auf der Kugeloberfläche. Zwischen den sie verbindenden Bogen grösster Kreise hat man die Bedingungsgleichung (22), welche ebenfalls als Definition der Punkte der Involution auf der Kugeloberfläche zu betrachten ist.

Gestützt auf diese Definitionen kann man mit Hülfe des in der vorhergehenden Vorlesung in (15) beschriebenen Principes der Kugel aus den angegebenen vier Sätzen folgende ableiten:

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen grössten Kreis durchschneidet und zu diesen Schnittpunkten auf den Seiten des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte construirt, so liegen je zwei von diesen harmonischen Punkten und der dritte Schnittpunkt auf einem grössten Kreise.

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen grössten Kreis schneidet und auf jeder Seite des Drei-

ecks den vierten harmonischen Punkt construirt, so schneiden sich die drei grössten Kreise, welche die harmonischen Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, in ein und demselben Punkte.

Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, durch einen grössten Kreis schneidet, und zwei von diesen Schnittpunkten durch grösste Kreise mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbindet, so schneiden sich diese in einem Punkte, durch welchen auch derjenige grösste Kreis hindurchgeht, welcher den zu dem dritten Schnittpunkt harmonischen Punkt mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet.

Drei Paare grösster Kreise, welche irgend vier Punkte der Kugeloberfläche paarweise verbinden, schneiden irgend einen anderen grössten Kreis in Punkten der Involution.

Die beiden letzten Sätze lehren zu drei auf einem grössten Kreise der Kugeloberfläche gegebenen Punkten den vierten harmonischen, und zu fünf Punkten der Involution den sechsten in linearer Weise construiren.

Die Bedingungsgleichung (10) für harmonische Punkte auf dem grössten Kreise der Kugeloberfläche geht über in:

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{(20)}{(21)} + \frac{(30)}{(31)} = o,$$

wenn man annimmt, dass die harmonischen Punkte unendlich nahe an einander liegen, und die sie begrenzenden Stücke des grössten Kreises können als gerade Linien betrachtet werden.

Ebenso geht die Bedingungsgleichung (22) für Punkte der Involution auf einem grössten Kreise der Kugeloberfläche über in:

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 = \frac{(B_0A_1)\,.\,(B_1A_2)\,.\,(B_2A_0)}{(B_0A_2)\,.\,(B_1A_0)\,.\,(B_2A_1)},$$

wenn die Punkte der Involution unendlich nahe an einander liegen, und die sie begrenzenden Stücke des grössten Kreises werden gerade Linien.

Nimmt man daher die Gleichung (23) als **Definition der harmonischen Punkte auf einer geraden Linie**, und die Gleichung (24) als **Definition der Punkte der Involution auf einer geraden Linie**, so lassen sich durch das unendlich Kleine die angegebenen vier Sätze der Kugeloberfläche ohne Schwierigkeit auf die Ebene übertragen.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die in der vorhergehenden Vorlesung angedeuteten Betrachtungen des Tetraeders auf Grund der in dieser Vorlesung entwickelten Sätze sich leicht ausdehnen lassen, was zu interessanten Sätzen führt über ein Tetraeder in Verbindung mit einem beliebigen Punkte des Raumes.

Vierte Vorlesung.

Das Pascal'sche Sechseck und damit verwandte Figuren.

Die geschickte Anwendung der in den beiden vorhergehenden Vorlesungen eingeführten Symbole führt oft mit solch überraschender Einfachheit zu complicirten geometrischen Sätzen, dass es gerechtfertigt erscheint, diesem Gegenstande noch einen kurzen Abschnitt zu widmen.

Man weiss, dass, wenn:

$$R = o, \quad R' = o, \quad r'' = o,$$

die gegebenen Gleichungen von irgend drei Ebenen sind, welche sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, sich λ und λ' so bestimmen lassen, dass folgende identische Gleichung erfüllt wird:

$$\frac{R}{\lambda} + \frac{R'}{\lambda'} + r'' \equiv o.$$

Setzt man daher $\frac{R}{\lambda} = r$, $\frac{R'}{\lambda'} = r'$, so stellen die Gleichungen:

$$r = o, \quad r' = o, \quad r'' = o$$

irgend welche drei Ebenen dar, welche sich in ein und derselben geraden Linie schneiden unter der Bedingung:

(1) . . . . $r + r' + r'' \equiv o.$

Man kann daher sagen, dass die identische Gleichung (1) die Bedingung der angegebenen Figur ausdrücke, welche besteht aus drei Ebenen r, die sich in ein und derselben geraden Linie schneiden.

Um diese Figur weiter auszuführen, nehme man auf der gemeinsamen Schnittlinie der drei Ebenen r einen Punkt P als die Spitze einer dreiseitigen Pyramide A, deren drei Seitenkanten respective in den Ebenen r liegen. Die Bedingungen der so erweiterten Figur werden dann durch (1) und in gleicher Weise durch die identischen Gleichungen ausgedrückt:

$$(2) \quad \ldots \quad a' - a'' \equiv r, \quad a'' - a \equiv r', \quad a - a' \equiv r'',$$

indem $a = o$, $a' = o$, $a'' = o$ die Seitenflächen der dreiseitigen Pyramide A analytisch darstellen.

Beschreibt man noch zwei andere dreiseitige Pyramiden B und C mit der gemeinsamen Spitze P, deren Seitenkanten gleichfalls in den Ebenen r liegen, so drücken sich die Bedingungen des hinzugekommenen Theiles der Figur in gleicher Weise durch die identischen Gleichungen aus:

$$(3) \quad \ldots \quad b' - b'' \equiv r, \quad b'' - b \equiv r', \quad b - b' \equiv r'',$$

$$(4) \quad \ldots \quad c' - c'' \equiv r, \quad c'' - c \equiv r', \quad c - c' \equiv r''.$$

Die Bedingungen der beschriebenen sehr complicirten Raumfigur drücken sich hiernach durch die zehn aufgestellten Gleichungen auf ganz einfache Weise aus. Der Vortheil dieser Ausdrucksweise besteht aber darin, dass man aus den übersichtlichen identischen Gleichungen andere eben so einfache ableiten kann, deren geometrische Deutung Eigenschaften der Figur leicht erkennen lässt. Denn stellt man folgende Gleichungen:

$$b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho''$$

als Definition auf der Symbole ϱ, ϱ', ϱ'', so sieht man, dass aus den angegebenen zehn identischen Gleichungen folgende hervorgehen:

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv o.$$

$$(6) \quad \ldots \quad b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho''.$$

$$(7) \quad \ldots \quad b' - c' \equiv \varrho, \quad c' - a' \equiv \varrho', \quad a' - b' \equiv \varrho''.$$

$$(8) \quad \ldots \quad b'' - c'' \equiv \varrho, \quad c'' - a'' \equiv \varrho', \quad a'' - b'' \equiv \varrho''.$$

Die letzten 9 Gleichungen beweisen, dass die Ebenen b und c, b' und c', b'' und c'' sich in drei geraden Linien schneiden, welche auf einer Ebene ϱ liegen u. s. w., und die Gleichung (5), dass die drei Ebenen ϱ durch ein und dieselbe gerade Linie gehen.

Alle Ebenen, von welchen die beschriebene Raumfigur handelt, gehen durch ein und denselben Punkt P. Die Projectionen derselben auf eine Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt P ist, werden daher grösste Kreise, und die bewiesenen Eigenschaften der Raumfigur lassen sich als Satz auf der Kugeloberfläche also ausdrücken:

Wenn die Ecken von drei sphärischen Dreiecken auf drei grössten Kreisen r der Kugeloberfläche liegen, welche sich in ein und demselben Punkte schneiden, so schneiden sich die entsprechenden Seiten je zweier dieser Dreiecke in drei Punkten, welche auf einem grössten Kreise ϱ liegen, und die drei grössten Kreise ϱ schneiden sich wieder in ein und demselben Punkte der Kugeloberfläche.

Das Princip der Kugel lässt aus diesem Satze folgenden hervorgehen:

Wenn die Seiten von drei sphärischen Dreiecken durch drei Punkte r der Kugeloberfläche gehen, welche auf einem grössten Kreise liegen, so schneiden sich die drei grössten Kreise, welche die entsprechenden Ecken von je zwei Dreiecken verbinden, in ein und demselben Punkte ϱ, und die drei Punkte ϱ liegen auf einem grössten Kreise.

Dass diese Sätze der Kugeloberfläche ebenfalls für die Ebenen gelten, wenn man für die grössten Kreise gerade Linien in der Ebene nimmt, bedarf nach dem Vorhergehenden kaum der Erwähnung.

Um eine zweite Anwendung zu machen von den Symbolen der Ebenen, betrachten wir irgend eine sechsseitige Pyramide, deren gegenüberliegende Seitenflächen sich paarweise in drei geraden Linien schneiden, welche in ein und derselben Ebene liegen. Eine solche sechsseitige Pyramide nennen wir eine Pascal'sche Pyramide nach dem Entdecker der Eigenschaften

derselben, und die Ebene, in welcher sich die gegenüberliegenden Seitenflächen derselben paarweise schneiden, nennen wir die der Pyramide zugehörige **Pascal'sche Ebene**.

Die Bedingungen der Pascal'schen Pyramide drücken sich nun einfach durch folgende drei identische Gleichungen aus:

$$(9) \quad \begin{aligned} a - a' &\equiv r'', \\ b - b' &\equiv r'', \\ c - c' &\equiv r'', \end{aligned}$$

indem $a = o$ und $a' = o$, $b = o$ und $b' = o$, $c = o$ und $c' = o$ die Gleichungen der gegenüberliegenden Seitenflächen der Pyramide vorstellen, und $r'' = o$ die Gleichung der ihr zugehörigen Pascal'schen Ebene.

Alle diese Ebenen, sowie diejenigen, welche in der Folge betrachtet werden, gehen durch die Spitze P der Pyramide.

Definirt man nun die Ausdrücke a'', b'', c'' durch die identischen Gleichungen:

$$(10) \ldots a'' + b + c' \equiv o, \quad a + b' + c'' \equiv o, \quad a' + b'' + c \equiv o,$$

so hat man mit Ziehung der identischen Gleichungen (9) auch folgende:

$$(11) \ldots a'' + b' + c \equiv o, \quad a + b'' + c' \equiv o, \quad a' + b + c'' \equiv o.$$

Diese sechs identischen Gleichungen beweisen, dass $a'' = o$, $b'' = o$, $c'' = o$ die Gleichungen von drei Ebenen sind, welche die gegenüberliegenden Seitenkanten der sechsseitigen Pyramide paarweise verbinden. Wir bezeichnen sie mit dem Namen der **Diagonalebenen** der sechsseitigen Pyramide.

Definirt man ferner zwei andere Ausdrücke r und r' durch die identischen Gleichungen:

$$a' - a'' \equiv r, \quad a'' - a \equiv r',$$

so hat man mit Berücksichtigung von (10) und (11):

$$(12) \quad \begin{aligned} a' - a'' &\equiv r, & a'' - a &\equiv r', \\ b' - b'' &\equiv r, & b'' - b &\equiv r', \\ c' - c'' &\equiv r, & c'' - c &\equiv r', \end{aligned}$$

und aus (9) und (12) folgt:

$$(13) \quad r + r' + r'' \equiv o.$$

Noch andere identische Gleichungen von derselben Form erhält man, wenn man drei Ausdrücke ϱ, ϱ', ϱ'' durch die identischen Gleichungen definirt:

$$b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho'',$$

aus welchen man mit Zuziehung der vorhergehenden Gleichungen leicht folgende ableiten kann:

$$\begin{aligned} & b - c \equiv \varrho, \quad c - a \equiv \varrho', \quad a - b \equiv \varrho'', \\ (14) \quad \ldots\ldots \quad & b' - c' \equiv \varrho, \quad c' - a' \equiv \varrho', \quad a' - b' \equiv \varrho'', \\ & b'' - c'' \equiv \varrho, \quad c'' - a'' \equiv \varrho', \quad a'' - b'' \equiv \varrho''. \end{aligned}$$

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv o.$$

Die fünf Systeme Gleichungen (12) und (14) sind conform mit dem Systeme (9), den Bedingungen der Pascal'schen Pyramide. Sie sind also die Ausdrücke für andere Pascal'sche Pyramiden, die in der betrachteten ihren Ursprung haben, und die Gleichungen (13) und (15) liefern den Beweis, dass die diesen Pyramiden zugehörigen Pascal'schen Ebenen sich zu dreien combinirt in ein und derselben geraden Linie schneiden.

Forscht man aber diesem Ursprunge näher nach, so ersieht man aus (12), dass die geraden Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide eine zweite, und dass die ungeraden Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide eine dritte Pascal'sche Pyramide bilden, beide mit denselben Seitenkanten als die gegebene Pyramide. Die diesen drei Pyramiden entsprechenden Pascal'schen Ebenen r schneiden sich nach (13) in ein und derselben durch die gemeinsame Spitze der Pyramiden gehenden geraden Linie.

Die sechs Seitenflächen und die drei Diagonalebenen der gegebenen Pascal'schen Pyramide bilden aber zu sechs combinirt nach (14) noch drei andere Pascal'sche Pyramiden mit denselben Seitenkanten als die gegebene. Die ihnen entsprechenden Pascal'schen Ebenen ϱ schneiden sich nach (15) in einer durch die gemeinsame Spitze der Pyramiden gehenden geraden Linie.

Nennt man, um die bewiesenen Sätze durch Projection von der gemeinsamen Spitze P der Pyramiden als Mittelpunkt auf die Kugeloberfläche zu übertragen, ein sphärisches Sechseck auf der Kugeloberfläche ein Pascal'sches Sechseck auf der Kugel-

oberfläche, wenn die gegenüberliegenden Seiten desselben sich paarweise in drei Punkten schneiden, die auf einem grössten Kreise, dem Pascal'schen Kreise des Sechsecks, liegen, so kann man denselben folgenden Ausdruck geben:

Wenn auf der Kugeloberfläche irgend ein Pascal'sches Sechseck gegeben ist, so bestimmen die sechs Seiten und die drei Diagonalen desselben als Seiten zu sechs combinirt zwei Gruppen von drei Pascal'schen Sechsecken, deren Ecken mit den Ecken des gegebenen Sechsecks zusammenfallen. Die Sechsecke der ersten Gruppe sind das gegebene, ein zweites Sechseck, gebildet aus den geraden Seiten des gegebenen und den drei Diagonalen, und ein drittes Sechseck, gebildet aus den ungeraden Seiten und den Diagonalen. Die Pascal'schen Kreise r der ersten Gruppe schneiden sich in ein und demselben Punkte; ebenso schneiden sich die Pascal'schen Kreise ϱ der zweiten Gruppe wieder in einem Punkte.

Aus der Uebereinstimmung der in dieser Untersuchung aufgestellten Gleichungen mit den Gleichungen, welche die vorhergehende darbot, ist man zu schliessen berechtigt, dass beide Untersuchungen in ihrem Verlauf dieselben Raumfiguren ergeben. Den einzigen Unterschied führen die Gleichungen (10) und (11) herbei, welche in der ersten Untersuchung fehlen. Da diese Gleichungen aber eine Beschränkung ausdrücken, so sieht man, dass die Figur der letzten Untersuchung einen specielleren Charakter hat.

Um schliesslich noch eine Eigenthümlichkeit der beschriebenen, specielleren Raumfigur vorzuführen, definiren wir drei Ausdrücke R, und drei Ausdrücke P durch folgende identische Gleichungen:

$$(16) \quad \begin{aligned} r'' - r' &\equiv R, & \varrho'' - \varrho' &\equiv P, \\ r - r'' &\equiv R', & \varrho - \varrho'' &\equiv P', \\ r' - r &\equiv R'', & \varrho' - \varrho &\equiv P'', \end{aligned}$$

woraus mit Hülfe der vorhergehenden identischen Gleichungen folgende hervorgehen:

$$(17)\ \ldots\ \begin{array}{lll} R + P \equiv 3a, & R' + P \equiv 3a', & R'' + P \equiv 3a, \\ R + P' \equiv 3b, & R' + P' \equiv 3b', & R'' + P' \equiv 3b'', \\ R + P'' \equiv 3c, & R' + P'' \equiv 3c', & R'' + P'' \equiv 3c''. \end{array}$$

Vergegenwärtigt man sich die Gleichungen (13), (15) und (16) so sieht man, dass $R = o$, $R' = o$, $R'' = o$ die den drei Ebenen r, r', r'' in ihren möglichen Combinationen entsprechenden vierten harmonischen Ebenen, und dass $P = o$, $P' = o$, $P'' = o$ die den drei Ebenen $\varrho, \varrho', \varrho''$ entsprechenden vierten harmonischen Ebenen darstellen, während die Gleichungen (17) den Beweis liefern, dass die drei vierten harmonischen Ebenen der ersten Gruppe die drei vierten harmonischen Ebenen der zweiten Gruppe in neun geraden Linien schneiden, welche auf den Seitenflächen und den Diagonalebenen der betrachteten Pascal'schen Pyramide liegen.

Man hat daher im Anschluss an den oben angegebenen Satz folgenden:

Die drei vierten harmonischen grössten Kreise zu den drei Pascal'schen Kreisen r schneiden die drei vierten harmonischen grössten Kreise zu den drei Pascal'schen Kreisen ϱ in neun Punkten, welche auf den Seiten und den Diagonalen des gegebenen Pascal'schen Sechsecks liegen.

Das Princip der Kugel angewendet auf diese Sätze führt auf neue Sätze. Alle diese Sätze kann man auch auf die Ebene übertragen, indem man gerade Linien in der Ebene für die grössten Kreise der Kugeloberfläche nimmt.

An die vorhergehende Betrachtung der Pascal'schen sechsseitigen Pyramide, deren Bedingungen die Gleichungen (9) ausdrücken, schliessen wir noch folgende zusätzliche Bemerkungen an:

Wie eine zwischen den variabeln Coordinaten lineare Gleichung eine Ebene definirt, so definirt irgend eine gegebene Gleichung zwischen denselben Coordinaten eine Oberfläche. Ist die gegebene Gleichung von der zweiten Ordnung, das heisst, besteht sie aus Gliedern, die nur die Quadrate der Coordinaten und die Producte derselben in der zweiten Dimension neben Gliedern der ersten und nullten Ordnung enthalten, so nennt man die Oberfläche zweiter Ordnung. Hiernach ist zum Beispiel:

$$(18)\ \ldots\ r''r'' - r''(a + b + c) + bc + ca + ab = o$$

die Gleichung einer bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Gleichung geht, wenn man a gleich o setzt, mit Rücksicht auf (9) über in:

$$(r'' - b)(r'' - c) = b'c' = o.$$

Die Gleichung (18) wird also erfüllt, wenn man $a = o$ und zugleich $b' = o$ setzt, das heisst, für die Coordinaten aller Punkte, welche in der Schnittlinie der beiden Ebenen $a = o$ und $b' = o$ liegen, die sich in einer Seitenkante der gegebenen Pascal'schen sechsseitigen Pyramide schneiden. Diese Seitenkante liegt daher in der durch die Gleichung (18) gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung.

Da sich dieselben Bemerkungen bei jeder Seitenkante jener Pascal'schen Pyramide wiederholen, so liegen sämmtliche sechs Seitenkanten der gegebenen Pascal'schen Pyramide in der durch die Gleichung (18) gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung.

Eine charakteristische Eigenschaft dieser Oberfläche lässt sich leicht aus ihrer Gleichung (18) erkennen, wenn man die Spitze P der Pyramide in den Coordinatenanfangspunkt legt. Denn in dieser Voraussetzung werden die Ausdrücke a, b, c, r', woraus die Gleichung (18) zusammengesetzt ist, lineare homogene Ausdrücke von der Form:

$$ux + vy + wz,$$

welche sämmtlich den Factor k erhalten, im Uebrigen aber ungeändert bleiben, wenn man für x, y, z respective setzt kx, ky, kz. Durch diese Aenderung erhält der linke Theil der Gleichung (18) den Factor k^2, bleibt aber im Uebrigen ungeändert.

Wenn daher x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Oberfläche (18) sind, so sind auch kx, ky, kz die Coordinaten eines Punktes derselben Oberfläche. Geometrisch bedeutet dieses, dass jede gerade Linie, welche irgend einen Punkt der Oberfläche mit dem Coordinatenanfangspunkt P verbindet, in ihrer ganzen Ausdehnung in der Oberfläche liegt. Die Oberfläche (18) besteht daher aus lauter geraden Linien, die in dem Punkte P zusammenstossen. Eine solche Oberfläche nennt man einen Kegel, und da derselbe durch eine Gleichung zweiter Ordnung (18) definirt wird; einen Kegel zweiter Ordnung. Man hat daher den Satz „dass die sechs Seitenkanten einer Pascal'schen Pyramide in einem Kegel zweiter Ordnung liegen."

Um die wahre Bedeutung dieses Satzes zu erkennen, bedarf es zweier Voraussetzungen, die freilich erst in den späteren Untersuchungen bewiesen werden, erstens, dass ein Kegel zweiter Ordnung durch fünf Kanten desselben unzweideutig bestimmt ist, zweitens, dass eine durch zwei Kanten des Kegels zweiter Ordnung gelegte Ebene den Kegel nur in diesen zwei Kanten schneidet. [Wir weisen auf die vierzehnte Vorlesung hin, in welcher die Voraussetzungen bewiesen werden.] Denn macht man diese Voraussetzungen, so sieht man, dass der angegebene Satz alle Kanten des Kegels zweiter Ordnung linear construiren lehrt, wenn fünf Kanten des Kegels gegeben sind; woraus wiederum folgt „dass alle einem Kegel zweiter Ordnung einbeschriebenen sechsseitigen Pyramiden Pascal'sche Pyramiden sind.“

Definirt man einen sphärischen Kegelschnitt als die Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung und einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels liegt, so überträgt sich der bewiesene Satz auf die Kugeloberfläche wie folgt:

Die Ecken eines Pascal'schen Secksecks auf der Kugeloberfläche liegen auf einem sphärischen Kegelschnitt.

Der aus den angegebenen Voraussetzungen hervorgegangene Satz, auf die Kugeloberfläche übertragen, lässt sich also wiedergeben:

Jedes einem sphärischen Kegelschnitt einbeschriebene sphärische Sechseck ist ein Pascal'sches Sechseck.

Das Princip der Kugel angewendet auf diese beiden Sätze veranlasst die Frage, welches die Curve sei, die von den grössten Kreisen der Kugeloberfläche berührt wird, deren Pole einen sphärischen Kegelschnitt beschreiben. Es lässt sich nachweisen, wozu die späteren Untersuchungen [in der vierzehnten Vorlesung über Kegel zweiter Ordnung] die Mittel bieten, dass diese grössten Kreise einen sphärischen Kegelschnitt berühren. Setzt man dieses als bewiesen voraus, so ergeben sich durch das Princip der Kugel aus den zuletzt angegebenen Sätzen neue, die sich gleich wie jene auch auf die Ebene übertragen lassen.

Fünfte Vorlesung.

Der Punkt im Raume und Punkte im Raume.

Wie die Lage eines Punktes im Raume durch drei Grössen, durch seine Coordinaten, unzweideutig bestimmt ist, so kann man auch die Lage einer beliebigen Ebene im Raume durch drei Grössen ausdrücken. Ist nämlich die Gleichung irgend einer Ebene:

(1) . . . . $ux + vy + wz + 1 = o$

gegeben, auf welche Form sich die Gleichung jeder Ebene zurückführen lässt, so sieht man, dass die Lage dieser Ebene allein abhängt von den Werthen der Constanten u, v, w, welche linear in die Gleichung eingehen. Weil diese Constanten die Lage der Ebene im Raume unzweideutig bestimmen, so werden wir sie die Coordinaten der Ebenen nennen, oder Ebenencoordinaten zum Unterschiede von den einen Punkt im Raume bestimmenden Punktcoordinaten.

Sind demnach die Coordinaten u, v, w einer Ebene gegeben, so kann man aus ihnen die Gleichung (1) zusammensetzen, die Gleichung der Ebene, durch welche die Ebene selbst im Raume bestimmt ist. Die Coordinaten der Ebene, geometrisch gedeutet, sind also die negativen reciproken Abschnitte, welche die Ebene auf den Coordinatenaxen macht.

Fragt man nach den Eigenschaften aller Punkte, deren Coordinaten irgend einer gegebenen linearen Gleichung der Coordinaten genügen, so weiss man, dass alle diese Punkte auf ein und derselben Ebene liegen. Die analoge Frage im Falle von Ebenencoordinaten stellt sich so: welche Eigenschaften haben alle Ebenen, deren Coordinaten irgend einer gegebenen linearen Gleichung genügen:

(2) . . . . $Au + Bv + Cw + D = o.$

Es wird sich zeigen, dass alle diese Ebenen durch ein und denselben durch die Gleichung (2) bestimmten Punkt hindurchgehen. Wenn nun im ersten Falle die gegebene, in Punktcoordinaten lineare, Gleichung die Gleichung der Ebene genannt wurde,

so verlangt die Analogie in dem anderen Falle, dass man die gegebene, in Ebenencoordinaten lineare, Gleichung (2) die **Gleichung des Punktes** nenne, durch welchen alle jene Ebenen gehen. Von dieser Benennungsweise soll in dem Folgenden ein vielfältiger Gebrauch gemacht werden.

Es bleibt aber noch nachzuweisen übrig, dass alle Ebenen (1), deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen, wirklich durch ein und denselben Punkt hindurchgehen. Um diesen Nachweis zu führen, kann man bemerken, dass in der Gleichung (2) die Coordinaten u, v beliebige Werthe annehmen, dass aber der Werth von w durch sie bestimmt ist. Setzt man daher diesen Werth von w in die Gleichung (1), so erhält man die Gleichung aller Ebenen (1), deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen, in der Form:

$$(3) \quad \ldots \quad (Cx - Az)u + (Cy - Bz)v + (C - Dz) = o$$

mit den beiden ganz willkürlichen Constanten u, v. Diese Gleichung ist aber zusammengesetzt aus den Gleichungen der drei Ebenen:

$$(4) \quad \ldots \quad Cx - Az = o, \quad Cy - Bz = o, \quad C - Dz = o.$$

Die Ebene (3) geht also durch den Schnittpunkt P der drei Ebenen (4), dessen Coordinaten sind:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D}.$$

Dieser Punkt P ist es also, welchen die Gleichung (2) analytisch darstellt. Es ergiebt sich hieraus zugleich eine Regel für die Bestimmung der Coordinaten eines durch seine Gleichung gegebenen Punktes, wie für die Bildung der Punktgleichung, wenn die Coordinaten des Punktes gegeben sind. Denn bringt man die gegebene Punktgleichung (2) durch Multiplication mit einem constanten Factor auf die Form, in welcher das constante Glied gleich der Einheit ist, so sind die Coefficienten von u, v, w die Coordinaten des Punktes. Multiplicirt man dagegen die gegebenen Coordinaten eines Punktes respective mit den Ebenencoordinaten und setzt die Summe dieser Producte zur Einheit, addirt gleich o, so hat man die Gleichung des Punktes.

Da die Gleichung (1), welche durch die Gleichung (2) auf die Form (3) gebracht wurde, in dieser Form mit den beiden willkürlichen Constanten u, v alle möglichen Ebenen darstellt,

welche durch den Punkt P gehen, so sieht man, dass die variabeln Ebenencoordinaten u, v, w, welche nur der Gleichung (2), der Gleichung des Punktes P, genügen, allen möglichen Ebenen zugehören, welche durch diesen Punkt gehen.

Die Form (2) der Gleichung des Punktes wird fortan **die allgemeine Form der Gleichung des Punktes** genannt werden zum Unterschiede von der Form:

(6) . . . . $au + bv + cw + 1 = o$,

die wir **die Normalform der Gleichung des Punktes** nennen.

(7) . . . **Wenn die Coordinaten U, V, W einer geraden Linie und die Gleichung eines Punktes im Raume in der Normalform gegeben sind, den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene zu bestimmen.**

Diese Aufgabe lässt sich leicht zurückführen auf die Aufgabe (7) in der zweiten Vorlesung. Denn es ist die Gleichung der Ebene in der Normalform:

$$\frac{Ux + Vy + Wz + 1}{-\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)}} = o,$$

und wenn (6) die gegebene Gleichung des Punktes ist, so hat man die Coordinaten desselben

$$a, \quad b, \quad c.$$

Daraus ergiebt sich nun nach der in (8) der zweiten Vorlesung angegebenen Regel der senkrechte Abstand des Punktes von der Ebene:

$$\frac{Ua + Vb + Wc + 1}{\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (6), so kann man folgende Regel aufstellen:

(8) . . . **Wenn man den linken Theil einer in der Normalform gegebenen Gleichung eines Punktes dividirt durch $\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}$, so drückt der Quotient den senkrechten Abstand aus des Punktes von einer durch ihre Coordinaten u, v, w gegebenen Ebene.**

Setzt man:

(9) . . . . $A = au + bv + cw + 1,$
$A_1 = a_1u + b_1v + c_1w + 1,$

so wird nach (8):

(10) . . . . $A - A_1 = o$

die Bedingung ausdrücken, dass eine durch ihre Coordinaten u, v, w bestimmte Ebene von den durch ihre Gleichungen $A = o$ und $A_1 = o$ gegebenen Punkten gleich weit abstehe. Da (10) aber die Gleichung eines Punktes ist, so werden alle Ebenen, deren senkrechte Abstände von den beiden Punkten gleich sind, durch jenen Punkt hindurchgehen. Es ist dieses bekanntlich derjenige Punkt, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte in dem Unendlichen liegt.

Sind die senkrechten Abstände der Ebene von den beiden gegebenen Punkten gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen, so hat man dafür die Bedingung:

(11) . . . . $A + A_1 = o,$

welches die Gleichung desjenigen Punktes ist, der die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte $A = o$ und $A_1 = o$ halbirt. Denn alle Ebenen, welche durch diesen Punkt gehen, haben von den beiden gegebenen Punkten gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Abstände. Man hat daher den Satz:

(12) . . . Wenn $A = o$ und $A_1 = o$ die Gleichungen zweier gegebener Punkte in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = o$ und $A + A_1 = o$ die Gleichungen zweier anderer Punkte auf der Verbindungslinie der ersteren, von welchen der eine in dem Unendlichen liegt, der andere die Verbindungslinie halbirt.

Um von diesem Satze eine Anwendung zu machen auf das ebene Dreieck und das Tetraeder nehmen wir folgende beide Sätze zu Hülfe:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen dreier Punkte $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$ die Identität statt hat:

$$kU + k_1U_1 + k_2U_2 = o,$$

so liegen die drei Punkte auf ein und derselben geraden Linie.

Die Coordinaten aller Ebenen, welche durch die beiden Punkte $U = o$ und $U_1 = o$ hindurchgehen, genügen diesen beiden Gleichungen zugleich, sie genügen also auch, mit Rücksicht auf die Identität, der Gleichung $U_2 = o$. Da aber alle Ebenen, deren Coordinaten der Gleichung $U_2 = o$ genügen, durch ein und denselben Punkt $U_2 = o$ gehen, und die vorhin erwähnten Ebenen, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte gehen, mit zu diesen Ebenen gehören, so muss der Punkt $U_2 = o$ auf der Verbindungslinie der beiden Punkte liegen.

(14) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von vier Punkten $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$, $U_3 = o$ die Identität statt hat:

$$k\,U + k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 \equiv o,$$

so liegen die vier Punkte auf ein und derselben Ebene.

Man hat nur eine Ebene, deren Coordinaten den drei Punktgleichungen $U = o$, $U_1 = o$, $U_2 = o$ zu gleicher Zeit genügen, nämlich die Ebene, welche durch die drei Punkte hindurchgeht. Die Coordinaten dieser Ebene genügen, mit Rücksicht auf die Identität, der Gleichung $U_3 = o$. Da nun alle Ebenen, welche der Gleichung $U_3 = o$ genügen, durch ein und denselben Punkt $U_3 = o$ gehen, so muss auch die angegebene Ebene durch diesen Punkt gehen.

Betrachtet man nun irgend ein ebenes Dreieck, dessen Ecken durch die Punktgleichungen in der Normalform gegeben seien:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden für die Halbirungspunkte der Seiten die Gleichungen:

$$A_1 + A_2 = o, \quad A_2 + A_0 = o, \quad A_0 + A_1 = o.$$

Die Gleichung aber:

$$A_0 + A_1 + A_2 = o$$

stellt einen Punkt im Raume dar, der nach (14) in der Ebene des Dreiecks und nach (13) auf jeder der drei geraden Linien liegt, welche die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks verbinden mit den gegenüberliegenden Ecken. Es ist dieses ein Satz, dem man folgenden Ausdruck geben kann:

Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines ebenen Dreiecks verbindet durch drei gerade Linien mit den ihnen gegenüberliegenden Ecken, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in ein und demselben Punkte, dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Drücken die Punktgleichungen in der Normalform:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o, \quad A_3 = o$$

die Ecken eines Tetraeders aus, so hat man für die Halbirungspunkte der Kanten die folgenden Gleichungen:

$$A_0 + A_1 = o, \quad A_2 + A_3 = o,$$

$$A_0 + A_2 = o, \quad A_3 + A_1 = o,$$

$$A_0 + A_3 = o, \quad A_1 + A_2 = o.$$

Zwei von diesen in derselben Horizontallinie stehenden Gleichungen zu einander addirt geben dreimal die Gleichung:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = o,$$

wodurch nach (13) der Beweis des Satzes geführt ist:

Wenn man die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders durch drei gerade Linien verbindet, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in ein und demselben Punkte.

Man kann aber auch die zuletzt angeführte Gleichung vier Mal zertheilen in die Summe von drei Gliedern + einem Gliede, woraus nach (13) der Satz entspringt:

Wenn man den Schwerpunkt einer jeden Seitenfläche eines Tetraeders durch eine gerade Linie verbindet mit der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders, so schneiden sich die vier Verbindungslinien in ein und demselben Punkte.

Die Analogie, welche die vorstehenden Untersuchungen mit der zweiten Vorlesung bieten, erstreckt sich auch auf die folgenden Untersuchungen und die dritte Vorlesung.

Sucht man die Bedingung, welche die Coordinaten u, v, w einer Ebene zu erfüllen haben, wenn die senkrechten Abstände der Ebene von zwei durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebenen Punkten:

$$(15) \quad A_0 = o, \quad A_1 = o$$

sich verhalten sollen wie zwei gegebene Grössen $a_0 : a_1$, so findet man:

$$(16) \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = o.$$

Es ist dieses die Gleichung eines Punktes. Durch ihn gehen also alle Ebenen, deren senkrechte Abstände die genannte Eigenschaft haben. Die geometrische Anschauung lehrt, dass dieser Punkt auf der durch die beiden Punkte gehenden geraden Linie liegt. Daher stellt die Gleichung (16) einen Punkt dieser geraden Linie dar. Die geometrische Anschauung lehrt ferner, dass die Abstände dieses Punktes selbst von den beiden gegebenen sich ebenfalls verhalten wie die gegebenen beiden Grössen $a_0 : a_1$. Daraus kann man wiederum schliessen, dass die Gleichung (16) jeden beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ausdrückt. Denn, welches auch der auf der Verbindungslinie angenommene Punkt sei, es wird (16) die Gleichung dieses Punktes sein, wenn a_0 und a_1 die Abstände desselben von den gegebenen beiden Punkten ausdrücken.

Bringt man, indem man $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$ setzt, (16) auf die Form:

$$(17) \quad A_0 - \lambda A_1 = o$$

und bezeichnet die gegebenen beiden Punkte mit 0 und 1, und einen dritten beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte mit 2, so wird dieses die Gleichung des Punktes 2 sein in der Voraussetzung, dass λ den Werth hat:

$$(18) \quad \lambda = \frac{(20)}{(21)}.$$

Dieser Punkt liegt zwischen den gegebenen beiden Punkten, oder ausserhalb derselben je nachdem λ negativ oder positiv ist.

Ein anderer Punkt 3, der ebenfalls auf der geraden Linie liegt, hat zur Gleichung:

$$(19) \quad A_0 - \mu A_1 = o.$$

Das Verhältniss:

(20) . . . . $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(20)}{(21)} : \frac{(30)}{(31)}$

nennt man das **anharmonische Verhältniss** des Punktenpaares 2 und 3 zu dem Punktenpaare 0 und 1.

Das anharmonische Verhältniss wird wieder $\frac{l}{m}$, wenn die Gleichungen der beiden Punktenpaare in der Form gegeben sind:

(21) . . . $V_0 = o, \quad V_1 = o, \quad V_0 - lV_1 = o, \quad V_0 - mV_1 = o,$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die allgemeinen Formen V_0, V_1 der Gleichungen des ersten Punktenpaares durch ihre Normalformen ausdrückt.

22) . . . **Gegeben sind die Gleichungen von vier Punkten, die auf ein und derselben geraden Linie liegen:**

$U_0 - \lambda U_1 = o, \quad U_0 - \mu U_1 = o, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = o, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = o,$

das anharmonische Verhältniss des letzten Punktenpaares zu dem ersten zu bestimmen.

Durch Zurückführung der gegebenen Formen auf die Formen (21) erhält man aus den letzteren das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ gleich:

(23) . . . . $\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}$.

Das anharmonische Verhältniss wird zu einem **harmonischen Verhältniss**, wenn ersteres den Werth -1 annimmt, und die beiden Punktenpaare werden unter dieser Bedingung **harmonische Punktenpaare**. Man erhält daher aus (20) die Bedingung für harmonische Punktenpaare auf einer geraden Linie:

(24) . . . . $\frac{(20)}{(21)} + \frac{(30)}{(31)} = o.$

Es ist dieses dieselbe Gleichung, welche wir am Schlusse der dritten Vorlesung unter (23) als Definition von harmonischen Punkten auf einer geraden Linie aufgestellt haben zum Zwecke der Uebertragung von Sätzen der Kugeloberfläche auf die Ebene. Ihre Discussion für specielle Fälle giebt eine Vorstellung von der Lage von zwei harmonischen Punktenpaaren zu einander.

So kann man zum Beispiel bemerken, wenn von einem Punktenpaare, welches harmonisch ist zu einem gegebenen Punktenpaar, der eine Punkt zwischen die gegebenen fällt, dass der andere ausserhalb liegt; wenn der eine Punkt die von dem gegebenen Punktenpaar begrenzte gerade Linie halbirt, dass der andere in das Unendliche fällt, und umgekehrt; endlich, wenn der eine Punkt einem der gegebenen unendlich nahe rückt, dass der andere ihm ebenfalls unendlich nahe rückt, so dass im Grenzfalle alle drei Punkte zusammenfallen.

Da für harmonische Punkte $\frac{l}{m} = -1$ ist, so stellen sich die Gleichungen zweier harmonischer Punktenpaare also dar:

(25) . . . $V_0 = o, \quad V_1 = o, \quad V_0 - l V_1 = o, \quad V_0 + l V_1 = o.$

Sind allgemeiner die Gleichungen von zwei Punktenpaaren auf derselben geraden Linie gegeben in der Form (22), so erhält man die Bedingung, dass sie harmonisch zu einander seien, wenn man (23) gleich -1 setzt, woraus die Bedingungsgleichung hervorgeht:

(26) . . . . . $\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = o.$

Wenn daher von zwei harmonischen Punktenpaaren drei Punkte gegeben sind, so ist der vierte harmonische Punkt unzweideutig bestimmt. Aber es ist nicht das Punktenpaar bestimmt, welches harmonisch ist zu einem gegebenen Punktenpaar. Deshalb kann man die Frage aufwerfen:

(27) . . . Dasjenige Punktenpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist zu jedem von zwei gegebenen Punktenpaaren, die auf derselben geraden Linie liegen.

Sind:
$$U_0 - \lambda_0 U_1 = o, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = o,$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = o, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = o$$

die Gleichungen der gegebenen, und:
$$U_0 - \lambda U_1 = o,$$
$$U_0 - \mu U_1 = o$$

die Gleichungen des gesuchten Punktenpaares, so hat man die Bedingungsgleichungen:
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = o,$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = o.$$

Hiernach sind die Unbekannten λ und μ als die Wurzeln einer leicht zu bildenden quadratischen Gleichung bestimmt. Man wird daher nur ein einziges Punktenpaar finden, welches zu den gegebenen beiden harmonisch ist.

Drei Punktenpaare auf derselben geraden Linie bilden eine Involution, wenn ein viertes Punktenpaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Punktenpaare.

Zwei gegebene Punktenpaare auf derselben geraden Linie bestimmen nach dem Vorhergehenden dasjenige Punktenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Punktenpaare. Ein drittes zu dem bestimmten Punktenpaare harmonisches Punktenpaar wird also mit den gegebenen beiden eine Involution bilden. Da aber von diesem dritten Punktenpaare ein Punkt auf der geraden Linie beliebig gewählt werden kann, so sieht man, dass von drei Punktenpaaren der Involution fünf Punkte auf der geraden Linie beliebig angenommen werden können, dass der sechste Punkt der Involution aber durch sie bestimmt ist. Es findet daher zwischen drei Punktenpaaren auf derselben geraden Linie nur eine Bedingungsgleichung statt, wenn sie eine Involution bilden.

(28) . . . Es sind die Gleichungen von drei Punktenpaaren auf derselben geraden Linie gegeben:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = o, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = o, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = o,$$
$$V_0 - \mu_0 V_1 = o, \quad V_0 - \mu_1 V_1 = o, \quad V_0 - \mu_2 V_1 = o$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher diese drei Punktenpaare eine Involution bilden.

Stellt man die drei Bedingungsgleichungen in der Form (26) auf, die erfüllt werden müssen, wenn sich ein Punktenpaar:

$$V_0 - \lambda V_1 = o,$$
$$V_0 - \mu V_1 = o$$

bestimmen lassen soll, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Punktenpaare, und eliminirt aus diesen drei Bedingungsgleichungen $\lambda + \mu$ und $\lambda\mu$, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(29) \ldots (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = o.$$

Diese Bedingungsgleichung wird, wenn man setzt $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und zugleich $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$. die Bedingungsgleichung für vier harmonische Punkte, die man erhält, wenn man den Ausdruck (23) gleich -1 setzt. Deshalb hat man den Satz:

Wenn von drei Punktenpaaren der Involution das eine Punktenpaar mit einem Punkte, ein zweites Punktenpaar mit einem zweiten Punkte zusammenfallen, so ist das dritte Punktenpaar der Involution harmonisch zu den beiden Punkten.

Diese Gleichung (29) geht ferner über in:

$$\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 = o,$$

wenn die Gleichungen der drei Punktenpaare in der Form gegeben sind:

$$A_0 = o, \quad A_0 - \lambda_1 A_1 = o, \quad A_0 - \lambda_2 A_1 = o,$$
$$A_1 = o, \quad A_0 - \mu_1 A_1 = o, \quad A_0 - \mu_2 A_1 = o,$$

woraus mit Rücksicht auf (18) die Relation hervorgeht:

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{(20)}{(21)} \cdot \frac{(30)}{(31)} - \frac{(40)}{(41)} \cdot \frac{(50)}{(51)} = o,$$

wenn A_0 und A_1 die Normalformen bedeuten für das erste Punktenpaar 0 und 1, und man das zweite Punktenpaar mit 2 und 3, und das dritte Punktenpaar mit 4 und 5 bezeichnet.

Die abgeleitete Gleichung (30) kann als Definition dienen für drei Punktenpaare der Involution, gleich wie die beiden anderen Gleichungen, welche aus ihr durch Vertauschung von je zwei Punkten der drei Punktenpaare hervorgehen.

Es lassen sich aber auch die Gleichungen von drei Punktenpaaren der Involution immer auf die Form zurückführen:

$$(31) \ldots \quad \begin{array}{lll} V_0 - \lambda_0 V_1 = o, & V_0 - \lambda_1 V_1 = o, & V_0 - \lambda_2 V_1 = o, \\ V_0 + \lambda_0 V_1 = o, & V_0 + \lambda_1 V_1 = o, & V_0 + \lambda_2 V_1 = o, \end{array}$$

indem man das Punktenpaar zum Grunde legt $V_0 = o$ und $V_1 = o$, welches harmonisch ist zu jedem Punktenpaare der Involution.

Setzt man, um diese Gleichungen symmetrisch durch drei Symbole auszudrücken:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0}, \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1},$$

so hat man die identische Gleichung:

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_0 + U_1 + U_2 \equiv o,$$

und die Gleichungen der drei Punktenpaare der Involution (31) stellen sich also dar:

$$(33) \dots \quad U_0 = o, \qquad U_1 = o, \qquad U_2 = o,$$
$$\frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = o, \quad \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = o, \quad \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = o,$$

indem die Grössen μ_0, μ_1, μ_2:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0, \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1, \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2$$

ebenso willkürlich bleiben als die Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

Man braucht daher nur die Gleichungen von drei Punktenpaaren auf die Form (33) zurückzuführen und die identische Gleichung (32) nachzuweisen, um den Beweis zu führen, dass die drei Punktenpaare eine Involution bilden.

Neben den Relationen (30) zwischen den Entfernungen der Punkte der Involution von einander hat man noch andere, die sich aus den Gleichungen (32) und (33) leicht ableiten lassen, wenn man die Symbole U_0, U_1, U_2 durch ihre Normalformen:

$$\varrho_0 U_0 = A_0, \quad \varrho_1 U_1 = A_1, \quad \varrho_2 U_2 = A_2$$

ersetzt, wodurch (32) und (33) übergehen in:

$$(34) \dots\dots\dots\dots \quad \frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} = o,$$

$$(35) \dots \quad A_0 = o, \qquad A_1 = o, \qquad A_2 = o,$$
$$\frac{A_1}{\varrho_1\mu_1} - \frac{A_2}{\varrho_2\mu_2} = o, \quad \frac{A_2}{\varrho_2\mu_2} - \frac{A_0}{\varrho_0\mu_0} = o, \quad \frac{A_0}{\varrho_0\mu_0} - \frac{A_1}{\varrho_1\mu_1} = o.$$

Denn es ist nach (18), wenn man die drei letzten Punkte mit B_0, B_1, B_2 bezeichnet:

$$\frac{\varrho_1\mu_1}{\varrho_2\mu_2} = \frac{(B_0A_1)}{(B_0A_2)}, \quad \frac{\mu_2\varrho_2}{\mu_0\varrho_0} = \frac{(B_1A_2)}{(B_1A_0)}, \quad \frac{\mu_0\varrho_0}{\mu_1\varrho_1} = \frac{(B_2A_0)}{(B_2A_1)},$$

woraus man durch Multiplication sämmtlicher Gleichungen erhält:

$$(36) \dots\dots\dots \quad 1 = \frac{(B_0A_1).(B_1A_2).(B_2A_0)}{(B_0A_2).(B_1A_0).(B_2A_1)}.$$

Es ist dieses dieselbe Gleichung, auf welche am Ende der dritten Vorlesung (24) die Betrachtung des unendlich Kleinen zurückführte. Aus ihr erhält man endlich durch Vertauschung von A_0 mit B_0, von A_1 mit B_1 und von A_2 mit B_2 noch drei andere Relationen neben der Gleichung (36), die alle dieselbe Bedingung aber in anderer Form ausdrücken und sich daher von einander ableiten lassen müssen.

Es wird dieses genügen, um die doppelte Deutung von linearen symbolischen Ausdrücken und Gleichungen von drei Variabeln anschaulich zu machen. Die weitere Durchführung derselben in dem letzten Theile der dritten Vorlesung unterliegt keinen Schwierigkeiten. Wir übergehen sie aber, weil sie nur zu solchen geometrischen Sätzen führt, die bereits durch das Princip der Kugel allgemeiner auf der Kugeloberfläche nachgewiesen wurden und ihre Geltung in der Ebene durch die erwähnte Betrachtung des unendlich Kleinen erlangen.

Wir schliessen diese Vorlesung mit einer Betrachtung des Tetraeders. Es seien:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o, \quad A_3 = o$$

die Gleichungen der Ecken desselben. Irgend drei beliebige Punkte auf den von der Ecke $A_0 = o$ ausgehenden Kanten stellen sich unter der Form dar:

$$\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_2}{a_2} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_3}{a_3} = o.$$

Die Differenzen dieser Gleichungen ergeben:

$$\frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = o, \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = o, \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = o,$$

als Gleichungen von drei Punkten auf den drei anderen Kanten des Tetraeders, die zugleich auf der durch die drei ersten Punkte gelegten Ebene liegen. Man kann also sagen, dass man durch die sechs Kanten des Tetraeders eine beliebige Ebene gelegt habe. Die Schnittpunkte derselben mit den sechs Kanten drücken jene sechs Gleichungen aus. Die Gleichungen der vierten harmonischen Punkte auf den Kanten des Tetraeders sind dann respective:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_2}{a_2} = o, \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_3}{a_3} = o,$$

$$\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = o, \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = o, \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = o.$$

Durch Addition je zweier von diesen Gleichungen, die unter einander stehen, erhält man die Gleichung:

$$\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = o.$$

Darauf beruht aber nach (13) der Beweis des Satzes:

Wenn man die Kanten oder die Verlängerungen der Kanten eines Tetraeders durch eine Ebene schnei-

det, und auf jeder Kante zu dem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt construirt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die vierten harmonischen Punkte auf den gegenüberliegenden Kanten paarweise verbinden, in ein und demselben Punkte.

Rückt die, die Kanten des Tetraeders schneidende, Ebene in das Unendliche, so werden die vierten harmonischen Punkte die Mittelpunkte der Kanten.

Sechste Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Gerade Linien im Raume.

Um die Vortheile der Symmetrie in der analytischen Geometrie zu haben, drückt man den Ort eines Punktes im Raume durch vier Coordinaten x, y, z, p aus. Man versteht darunter vier Grössen, deren Verhältnisse $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ die gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes darstellen. Wir werden fortan jene vier Grössen die Coordinaten, oder die homogenen Coordinaten des Punktes nennen, die angegebenen Verhältnisse dagegen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes.

Dieses vorausgesetzt, werden die Coordinaten eines Punktes die Lage desselben im Raume zwar unzweideutig bestimmen, aber nicht umgekehrt sind die Coordinaten eines Punktes vollständig bestimmt, wenn die Lage des Punktes im Raume gegeben ist.

Ein Punkt im Raume hat hiernach unendlich viele Werthe seiner Coordinaten, deren Verhältnisse zu einander aber bestimmt sind. Umgekehrt werden mehrere Systeme von Coordinaten ein und denselben Punkt bestimmen, wenn ihre Verhältnisse dieselben sind.

Die Gleichung einer Ebene durch rechtwinklige Coordinaten ausgedrückt:

$$Ax + By + Cz + D = o$$

wird durch Einführung der homogenen Coordinaten, indem man $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ respective für x, y, z setzt, und mit p multiplicirt, zu einer homogenen Gleichung derselben Ebene:

$$Ax + By + Cz + Dp = o.$$

Ist daher $U = o$ die Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Coordinaten und man setzt $pU = W$, so wird $W = o$ die homogene Gleichung derselben Ebene, wenn man für die Producte xp, yp, zp, p die neuen Coordinaten setzt x, y, z, p.

Umgekehrt, ist $W = o$ die homogene Gleichung einer Ebene, so braucht man in ihr nur $p = 1$ zu setzen, um die Gleichung derselben Ebene in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten.

Man ersieht hieraus, dass sich mit den homogenen Formen der Gleichungen von Ebenen ebenso operiren lässt, als mit den allgemeinen Formen.

Sind zum Beispiel die Gleichungen von zwei Ebenenpaaren, die sich in derselben geraden Linie schneiden, in der allgemeinen Form gegeben:

$$U_0 = o, \quad U_1 = o, \quad U_0 - \lambda U_1 = o, \quad U_0 - \mu U_1 = o;$$

so stellen sich die Gleichungen dieser Ebenen, indem man setzt $p U_0 = W_0$, $p U_1 = W_1$ in der homogenen Form ebenso dar:

$$W_0 = o, \quad W_1 = o, \quad W_0 - \lambda W_1 = o, \quad W_0 - \mu W_1 = o.$$

Diese homogenen Gleichungen gehen wieder in die vorhergehenden über, wenn man $p = 1$ setzt. Das anharmonische Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ des zweiten Ebenenpaares zu dem ersten lässt sich im ersten wie in dem zweiten Falle aus den Gleichungen ablesen.

Gleichzeitig drückt man die Lage einer Ebene im Raume durch vier Ebenencoordinaten, homogene Ebenencoordinaten, u, v, w, r aus. Man versteht darunter die Coefficienten der Variabeln in der homogenen Gleichung der Ebene. Die gebräuchlichen rechtwinkligen Ebenencoordinaten sind demnach die durch die Lage der Ebene im Raume gegebenen Verhältnisse $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$.

Die Gleichung eines Punktes:

$$Au + Bv + Cw + D = o$$

wird durch Einführung der homogenen Ebenencoordinaten, indem man $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$ für u, v, w setzt und mit r multiplicirt, zu einer homogenen Gleichung desselben Punktes:

$$Au + Bv + Cw + Dr = o.$$

Ist daher $U = o$ die Gleichung eines Punktes in rechtwinkligen Ebenencoordinaten, und man setzt $rU = R$, so wird $R = o$

die homogene Gleichung desselben Punktes, wenn man für ru, rv, rw, r respective setzt u, v, w, r.

Ist umgekehrt $R = o$ die homogene Gleichung eines Punktes, so geht dieselbe, wenn man in ihr $p = 1$ setzt, in die durch rechtwinklige Ebenencoordinaten ausgedrückte Gleichung desselben Punktes über.

Für diese homogenen Formen der Punktgleichungen gelten daher dieselben Entwickelungen, die wir für die allgemeinen Formen der Punktgleichungen gegeben haben.

Sind zum Beispiel die homogenen Gleichungen von zwei Punktenpaaren auf derselben geraden Linie gegeben in der Form:

$$R_0 = o; \quad R_1 = o, \quad R_0 - \lambda R_1 = o, \quad R_0 - \mu R_1 = o,$$

so hat man das anharmonische Verhältniss des zweiten Punktenpaares zu dem ersten gleich $\frac{\lambda}{\mu}$.

Der Vortheil der homogenen Coordinaten tritt erst in den folgenden Betrachtungen zu Tage.

Wenn man mit R_k den Ausdruck bezeichnet:

$$R_k = x_k u + y_k v + z_k w + p_k r,$$

so sind:

$$R_0 = o, \quad R_1 = o$$

die homogenen Gleichungen zweier Punkte 0 und 1, die durch ihre Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 und x_1, y_1, z_1, p_1 gegeben sind. Es ist ferner:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 = o$$

die Gleichung irgend eines Punktes P auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte. Bezeichnet man mit x, y, z, p die Coordinaten dieses Punktes und bestimmt dieselben aus der zuletzt angegebenen Gleichung, so erhält man:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nun die Coordinaten x, y, z, p aller Punkte auf der Verbindungslinie der beiden Punkte 0 und 1, wenn man λ_0 und λ_1 beliebig variiren lässt. Man kann aber auch $\lambda_0 = 1$ setzen und allein λ_1 variiren lassen. Die Coordinaten des zu P

harmonischen Punktes erhält man aus (1), wenn man λ_1 in $-\lambda_1$ umwandelt.

Aus den gegebenen Gleichungen von drei Punkten o, 1, 2:

$$R_0 = o, \quad R_1 = o, \quad R_2 = o$$

setzt sich die Gleichung eines beliebigen Punktes der Ebene zusammen, die durch die gegebenen drei Punkte hindurchgeht:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = o.$$

Die Coordinaten x, y, z, p dieses Punktes stellen sich dar wie folgt:

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke geben die Coordinaten aller Punkte der genannten Ebene, wenn man $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ beliebig variiren lässt oder auch nur zwei von diesen Grössen.

Ebenso setzt sich aus den gegebenen vier Punktgleichungen:

$$R_0 = o, \quad R_1 = o, \quad R_2 = o, \quad R_3 = o$$

die Gleichung eines beliebigen Punktes im Raume zusammen:

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = o,$$

woraus man die Coordinaten x, y, z, p dieses Punktes erhält:

$$\text{(3)} \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3, \\ p &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3. \end{aligned}$$

Die analogen Betrachtungen, angestellt bei homogenen Gleichungen der Ebenen, führen auf ganz analog gebildete Relationen.

Bezeichnet man nämlich mit W_k den Ausdruck:

$$W_k = u_k x + v_k y + w_k z + r_k p,$$

so hat man die Gleichungen zweier durch ihre homogenen Coordinaten u_0, v_0, w_0, r_0 und u_1, v_1, w_1, r_1 gegebenen Ebenen 0 und 1:

$$W_0 = o, \quad W_1 = o,$$

Irgend eine Ebene, die durch die Schnittlinie der gegebenen Ebenen hindurchgeht, hat zur Gleichung:

$$\lambda_0 W_0 + \lambda_1 W_1 = o.$$

Wenn nun u, v, w, r die Coordinaten dieser Ebene bezeichnen, so hat man:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1, \end{aligned}$$

und man erhält die Coordinaten aller durch die genannte Schnittlinie gehenden Ebenen, wenn man λ_0 und λ_1 variiren lässt oder auch nur eine von diesen willkürlichen Grössen. Fixirt man aber eine von diesen Ebenen, so erhält man die Coordinaten der ihr zugehörigen vierten harmonischen Ebene aus (4), wenn man für λ_1 setzt $-\lambda_1$.

In ähnlicher Weise drückt man die Coordinaten u, v, w, r einer beliebigen Ebene, welche durch den Schnittpunkt dreier durch ihre Coordinaten gegebenen Ebenen hindurchgeht, durch folgende Gleichungen aus:

$$(5) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2. \end{aligned}$$

Endlich lassen sich die Coordinaten u, v, w, r irgend einer Ebene im Raume durch die Coordinaten von vier Ebenen also ausdrücken:

$$(6) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3, \\ r &= \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3. \end{aligned}$$

Stellt man die homogenen Gleichungen von vier Ebenen 0, 1, 2, 3, welche sich in ein und derselben geraden Linie schneiden:

$$W_0 = o, \quad W_1 = o, \quad W_0 - \lambda W_1 = o, \quad W_0 - \mu W_1 = o$$

zusammen mit den homogenen Coordinaten von irgend vier Punkten 0, 1, 2, 3, welche in derselben geraden Linie liegen:

$$\begin{array}{cccc} x_0, & x_1, & x_0 - l x_1, & x_0 - m x_1, \\ y_0, & y_1, & y_0 - l y_1, & y_0 - m y_1, \\ z_0, & z_1, & z_0 - l z_1, & z_0 - m z_1, \\ p_0, & p_1, & p_0 - l p_1, & p_0 - m p_1, \end{array}$$

und drückt die vier Bedingungen aus, die erfüllt werden müssen, wenn diese vier Punkte respective in den vier Ebenen liegen, so erhält man:

$$W_0^0 = o, \quad W_1^1 = o, \quad l W_0^1 + \lambda W_1^0 = o, \quad m W_0^1 + \mu W_1^0 = o,$$

wenn W_0^0 und W_1^0 die Ausdrücke bezeichnen, in welche W_0 und W_1 übergehen durch Vertauschung der variabeln Coordinaten mit den Coordinaten des Punktes o, und wenn W_0^1, W_1^1 die Ausdrücke bezeichnen, in welche W_0 und W_1 übergehen durch Vertauschung der variabeln Coordinaten mit den Coordinaten des Punktes 1. Aus den beiden letzten Bedingungen erhält man aber:

$$\frac{l}{m} = \frac{\lambda}{\mu},$$

das heisst, die Punkte haben dasselbe anharmonische Verhältniss, als die Ebenen, auf welchen sie liegen. Sie sind deshalb harmonische Punkte, wenn die Ebenen harmonische Ebenen sind, und umgekehrt. Daraus entspringen die Sätze:

Vier harmonische Ebenen werden durch eine gerade Linie in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Vier in derselben geraden Linie sich schneidende Ebenen sind harmonische Ebenen, wenn jede derselben durch einen von vier harmonischen Punkten geht.

An diese Sätze schliessen sich unmittelbar folgende an:

Drei Ebenenpaare der Involution werden durch eine gerade Linie geschnitten in Punktenpaaren der Involution.

Drei Paar Ebenen, welche sich in ein und derselben geraden Linie schneiden, bilden eine Involution, wenn jede Ebene durch einen von sechs Punkten der Involution hindurchgeht.

Denn, sind drei Ebenenpaare der Involution gegeben, und man construirt dasjenige Ebenenpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei gegebenen Ebenenpaare, so schneidet das harmonische Ebenenpaar eine gegebene gerade Linie in einem Punktenpaare, welches harmonisch ist zu den Schnittpunkten eines jeden der drei Ebenenpaare auf der gegebenen geraden Linie. Letztere bilden also nach der Definition eine Involution. Hieraus ergiebt sich zugleich der Beweis des letzten Satzes, wenn man Ebenen und Punkte in geeigneter Weise mit einander vertauscht.

Durch zwei in Punktcoordinaten lineare Gleichungen stellt man eine gerade Linie im Raume dar, die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche die linearen Gleichungen einzeln ausdrücken. Denn die Coordinaten aller Punkte, welche auf dieser Schnittlinie liegen, genügen zu gleicher Zeit beiden Gleichungen, und umgekehrt, die Coordinaten, welche beiden Gleichungen zugleich genügen, gehören Punkten zu, welche auf der geraden Linie liegen.

In ähnlicher Weise kann man eine gerade Linie im Raume durch zwei in Ebenencoordinaten lineare Gleichungen darstellen. Denn die Coordinaten aller Ebenen, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte hindurchgehen, genügen zugleich beiden Gleichungen, und umgekehrt alle Ebenencoordinaten, welche den beiden Gleichungen zugleich genügen, gehören Ebenen zu, die sich in der genannten Verbindungslinie schneiden.

Durch Einführung von zwei neuen Variabeln drückt man die gerade Linie im Raume analytisch durch vier Gleichungen aus, nämlich durch die Gleichungen (1) oder durch die Gleichungen (4). Aus ihnen erhält man die erwähnten zwei Ausdrücke der geraden Linie, indem man durch Elimination von λ_0 und λ_1 zwei Gleichungen bildet, im ersten Falle zwei lineare Gleichungen in Punktcoordinaten, im zweiten Falle zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten.

Es bringt bisweilen Vortheil, eine gerade Linie analytisch durch drei Gleichungen auszudrücken, indem man nur eine neue Variable einführt, wie folgt:

Wenn a, b, c die rechtwinkligen Coordinaten eines gegebenen Punktes o auf einer geraden Linie ausdrücken, und α, β, γ die

Winkel, welche die gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet, so ist durch diese Bestimmungsstücke die Lage der geraden Linie im Raume unzweideutig gegeben, und die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p auf der geraden Linie werden nicht mehr willkürlich sein, sondern gewissen Bedingungen genügen müssen. Um diese Bedingungen zu erhalten, projicire man die begrenzte gerade Linie op, deren Länge mit r bezeichnet werde, auf die Coordinatenaxen. Das eine Mal erhält man diese Projectionen gleich $x - a$, $y - b$, $z - c$, das andere Mal gleich $r \cos\alpha$, $r \cos\beta$, $r \cos\gamma$. Man hat daher für die gerade Linie die Gleichungen:

$$
(7) \qquad \begin{aligned} x - a &= r \cos\alpha, \\ y - b &= r \cos\beta, \\ z - c &= r \cos\gamma, \end{aligned}
$$

ausgedrückt durch die rechtwinkligen Coordinaten eines gegebenen Punktes auf ihr und durch die Winkel, die die gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet. Man erhält hieraus die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z aller Punkte der geraden Linie, indem man r beliebig variiren lässt, oder die Gleichungen zweier Ebenen, welche sich in der geraden Linie schneiden, wenn man die variable Grösse r eliminirt, welche die Entfernung des variabeln Punktes p von dem gegebenen Punkte o der geraden Linie ausdrückt.

Wir schliessen diese Vorlesung mit zwei Aufgaben, deren Auflösungen Gelegenheit geben werden, Formeln, welche in der ersten Vorlesung entwickelt wurden, in Anwendung zu bringen.

(8) . . . Den senkrechten Abstand zu bestimmen eines gegebenen Punktes von einer gegebenen geraden Linie im Raume.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes seien a_1, b_1, c_1, und die Gleichungen der gegebenen geraden Linie:

$$
\begin{aligned} x - a &= r\,.\,\alpha, \\ y - b &= r\,.\,\beta, \\ z - c &= r\,.\,\gamma, \end{aligned}
$$

wo α, β, γ der Kürze wegen die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche die gegebene gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet.

Fällt man von dem gegebenen Punkte (a_1, b_1, c_1) auf die gegebene gerade Linie das Loth Δ, und verbindet den gegebenen Punkt mit dem in der geraden Linie gegebenen Punkte (a, b, c) durch eine Gerade A, so bilden das Loth Δ, die construirte Gerade A und das Stück B der gegebenen geraden Linie, welches zwischen beiden liegt, ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem man hat:

$$\Delta = A \,.\, \sin(AB).$$

Es ist aber:

$$\sin(AB) = \sqrt{\{(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\}},$$

wenn $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Gerade A mit den Coordinatenaxen bildet. Diese Cosinus drücken sich aber so aus:

$$\alpha_1 = \frac{a - a_1}{A}, \qquad \beta_1 = \frac{b - b_1}{A}, \qquad \gamma_1 = \frac{c - c_1}{A}.$$

Setzt man diese Werthe in die letzte Gleichung, und den sich daraus ergebenden Werth von $\sin(AB)$ in die erste Gleichung, so erhält man den gesuchten senkrechten Abstand:

$$\Delta = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} [\beta(c - c_1) - \gamma(b - b_1)]^2 \\ + [\gamma(a - a_1) - \alpha(c - c_1)]^2 \\ + [\alpha(b - b_1) - \beta(a - a_1)]^2 \end{array}\right\}}.$$

Um noch die Coordinaten ξ, η, ζ des Fusspunktes des Lothes Δ auf der gegebenen geraden Linie zu bestimmen, drücken wir B aus, wie folgt:

$$B = A \,.\, \cos(AB) = A(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1),$$

und durch Einsetzung der oben angegebenen Werthe von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$:

$$B = \alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1) + \gamma(c - c_1).$$

Ist hierdurch aber die Länge von B bestimmt, so erhält man durch Projection derselben auf die Coordinatenaxen:

$$\xi - a = B \,.\, \alpha,$$
$$\eta - b = B \,.\, \beta,$$
$$\zeta - c = C \,.\, \gamma.$$

9) . . . . Die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien im Raume von einander zu bestimmen.

Es seien die Gleichungen der gegebenen beiden geraden Linien L, L_1:

$$x - a = r.\alpha, \quad x_1 - a_1 = r_1.\alpha_1,$$
$$y - b = r.\beta, \quad y_1 - b_1 = r_1.\beta_1,$$
$$z - c = r.\gamma, \quad z_1 - c_1 = r_1.\gamma_1.$$

Das Quadrat der Entfernung R eines beliebigen Punktes (x, y, z) der einen geraden Linie von einem beliebigen Punkte (x_1, y_1, z_1) der anderen geraden Linie stellt sich als Function der Coordinaten der beiden Punkte also dar:

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Diese Coordinaten sind so zu bestimmen, dass R^2 unter den angegebenen, zwischen ihnen stattfindenden, Bedingungsgleichungen ein Minimum werde. Denkt man sich aber die Werthe der Coordinaten aus den gegebenen Gleichungen der geraden Linien in den Ausdruck R^2 eingesetzt, so wird R^2 eine Function allein der von einander unabhängigen Variabeln r und r_1. Die Differentialrechnung lehrt die Werthe der Variabeln bestimmen, welche eine solche Function zu einem Minimum machen. Dieses geschieht aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{dR^2}{dr} = o, \quad \frac{dR^2}{dr_1} = o.$$

Setzt man die sich aus diesen beiden Gleichungen ergebenden Werthe der Variabeln r und r_1 in die Gleichungen der beiden geraden Linien ein, so erhält man die Coordinaten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) der Begrenzungspunkte der kürzesten geraden Linie R auf den beiden gegebenen geraden Linien.

Die zuletzt genannten beiden Gleichungen stellen sich, wenn man für R^2 seinen angegebenen Werth setzt, also dar:

$$(x - x_1)\alpha + (y - y_1)\beta + (z - z_1)\gamma = o.$$
$$(x - x_1)\alpha_1 + (y - y_1)\beta_1 + (z - z_1)\gamma_1 = o.$$

Da aber die Differenzen $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ der Coordinaten der Begrenzungspunkte der kürzesten geraden Linie R sich verhalten wie die Cosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ der Winkel, welche die kürzeste Linie R mit den Coordinatenaxen bildet, so kann man diese Gleichungen auch so schreiben:

$$\alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma = o,$$
$$\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 = o,$$

in welcher Form die linken Theile der Gleichungen die Cosinus der Neigungswinkel ausdrücken, welche die kürzeste Linie R mit den gegebenen beiden Linien L und L_1 bildet. Da diese Cosinus aber gleich o sind, so folgt hieraus, dass die kürzeste Linie R senkrecht steht auf jeder der beiden gegebenen Linien L und L_1.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse von α_3, β_3, γ_3:

$$\lambda\alpha_3 = \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma,$$
$$\lambda\beta_3 = \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha,$$
$$\lambda\gamma_3 = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

woraus man wieder, indem man quadrirt und addirt, erhält:

$$\lambda^2 = \sin^2(LL_1) = (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2.$$

Setzt man diesen Werth von λ in die letzten drei Gleichungen, so erhält man die Cosinus der Winkel, welche die kürzeste Linie mit den Coordinatenaxen bildet:

$$\alpha_3 = \frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\sin(LL_1)},$$

$$\beta_3 = \frac{\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha}{\sin(LL_1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}{\sin(LL_1)}.$$

Um die Länge der kürzesten Linie zu erhalten, projicire man die Verbindungslinie D der auf den Linien L und L_1 gegebenen beiden Punkte (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1), welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus wir bezeichnen mit α_2, β_2, γ_2, auf die kürzeste Linie R. Sie wird R selber sein, weil die gegebenen beiden geraden Linien L, L_1 auf der kürzesten Linie R zwischen beiden senkrecht stehen. Man hat daher:

$$R = D.\cos(DR) = D(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3).$$

Da aber:

$$D\alpha_2 = a - a_1,\quad D\beta_2 = b - b_1,\quad D\gamma_2 = c - c_1,$$

so erhält man aus der letzten Gleichung durch Einsetzen dieser Werthe und der vorhin angegebenen für α_3, β_3, γ_3 und $\sin(LL_1)$:

$$(10)\ldots R = \frac{(a-a_1)(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) + (b-b_1)(\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha) + (c-c_1)(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{\sqrt{\{(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\}}}.$$

Es bleibt noch übrig die Werthe von r und r_1 zu bestimmen, welche R^2 zu einem Minimum machen, um mit Hülfe der gegebenen Gleichungen der geraden Linien L und L_1 die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 der Begrenzungspunkte der kürzesten Linie R auszudrücken. Hierzu dienen die zu Anfang der Untersuchung aufgestellten beiden Gleichungen, die sich, wenn man für x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Werthe aus den Gleichungen der gegebenen beiden geraden Linien substituirt, reduciren auf:

$$(a - a_1)\,\alpha + (b - b_1)\,\beta + (c - c_1)\,\gamma + r - r_1 \cos(L L_1) = o,$$

$$(a - a_1)\,\alpha_1 + (b - b_1)\,\beta_1 + (c - c_1)\,\gamma_1 + r \cos(L L_1) - r_1 = o.$$

Diese Gleichungen gehen, wenn man für die Differenzen $a - a_1$, $b - b_1$, $c - c_1$ die vorhin angegebenen Werthe $D\alpha_2$, $D\beta_2$, $D\gamma_2$ setzt, über in:

$$D \cos(L D) + r - r_1 \cos(L L_1) = o,$$

$$D \cos(L_1 D) + r \cos(L L_1) - r_1 = o,$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen nach r und r_1 erhält man:

$$r = \frac{D}{\sin^2(L L_1)} \left[\cos(L_1 D) \,.\, \cos(L L_1) - \cos(L D)\right],$$

$$r_1 = -\frac{D}{\sin^2(L L_1)} \left[\cos(L D) \,.\, \cos(L L_1) - \cos(L_1 D)\right].$$

Dadurch sind aber die Grössen r und r_1 unzweideutig bestimmt. Um sie durch die gegebenen Grössen auszudrücken, hat man folgende Substitutionen zu machen:

$$D \cos(L D) = (a - a_1)\alpha + (b - b_1)\beta + (c - c_1)\gamma,$$

$$D \cos(L_1 D) = (a - a_1)\alpha_1 + (b - b_1)\beta_1 + (c - c_1)\gamma_1,$$

$$\cos(L L_1) = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1,$$

$$\sin^2(L L_1) = (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2.$$

Siebente Vorlesung.

Determinanten.

Ein wesentliches Hülfsmittel zur Umformung von Gleichungen, welche als eine der Aufgaben der analytischen Geometrie bezeichnet wurde, ist die Determinantentheorie. Um dieses Hilfsmittels in dem Folgenden nicht zu entbehren, sollen in dieser Vorlesung der Begriff der Determinante und aus ihm einige Sätze der Determinantentheorie entwickelt werden.

Es ist eine Eigenschaft des Products sämmtlicher Differenzen von $n+1$ Elementen $a_0, a_1 \ldots a_n$:

$$\begin{aligned} P = (a_1 - a_0)\ (a_2 - a_0)\ \ldots\ (a_n - a_0),\\ (a_2 - a_1)\ \ldots\ (a_n - a_1),\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

welches aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren besteht, dass dieses Product nur sein Vorzeichen ändert, wenn man die Elemente a_0 und a_1 mit einander vertauscht. Aber diese Eigenschaft gilt allgemein für irgend zwei von den angegebenen Elementen $a_\varkappa$ und a_λ. Man überzeugt sich von der Wahrheit dieser Behauptung leicht, wenn man die Factoren also ordnet:

$$\pm P = (a_\varkappa - a_\lambda)\ \Pi\,(a_{\varkappa'} - a_\varkappa)\ \Pi\,(a_{\lambda'} - a_\lambda)\ \Pi\,(a_{\varkappa'} - a_{\lambda'}),$$

woselbst angenommen ist, dass $\varkappa'$ und λ' die Zahlen $0, 1 \ldots n$ mit Ausnahme der Zahlen $\varkappa$ und λ, und dass $\Pi\,(a_{\varkappa'} - a_\varkappa)$ das Product aus den Factoren $a_{\varkappa'} - a_\varkappa$ etc. . . . bedeuten. Denn durch die angegebene Vertauschung ändert nur der erste Factor sein Vorzeichen. Der zweite und dritte Factor gehen in einander über, während der letzte Factor ganz ungeändert bleibt. Da ferner immer einer der $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren von P verschwindet, wenn man für ein Element ein anderes setzt, so kann man folgende beide bemerkenswerthe Eigenschaften des Productes P hervorheben:

Das Product P ändert nur sein Vorzeichen, wenn man zwei Elemente in demselben mit einander vertauscht.

Das Product P verschwindet, wenn man für eines der $n+1$ Elemente ein anderes setzt.

Die Entwickelung des Products P giebt Glieder von der Form:

$$c\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Da aber das Produkt selbst aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Factoren besteht, so hat man:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Das angegebene Glied der Entwickelung verlangt, dass in derselben auch folgendes Glied enthalten sei:

$$-\ c\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_\varkappa} a_\varkappa^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

mit dem entgegengesetzten Vorzeichen als das angegebene Glied. Denn da durch Vertauschung der Elemente $a_\varkappa$ und a_λ das Product P übergeht in $-P$, so müssen in der Entwickelung von P die Glieder paarweise mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen, so dass sie, abgesehen von dem Vorzeichen, durch die angegebene Vertauschung der Elemente in einander übergehen. Hieraus folgt, dass die Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ verschiedene ganze Zahlen sind. Denn wären sie gleiche Zahlen, so würden sich die beiden angegebenen Glieder der Entwickelung fortheben. Es sind also die Exponenten $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ verschiedene ganze Zahlen. Da aber die Summe derselben gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, so können sie nur die Zahlen sein:

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n$$

in irgend einer Reihenfolge.

Diese Bemerkungen geben ein Mittel an die Hand aus einem Gliede der Entwickelung von P alle übrigen zu bilden. Ein erstes positives Glied der Entwickelung ist:

$$a_0^0\ a_1^1 \ldots a_n^n,$$

welches man erhält, wenn man die positiven Theile der Differenzen in dem Product P mit einander multiplicirt. Aus diesem positiven Gliede geht durch Vertauschung zweier Elemente, oder, was dasselbe ist, zweier Indices ein Glied der Entwickelung hervor, welchem das negative Vorzeichen zuzuertheilen ist; aus diesem



letzteren wieder ein positives, wenn man zwei andere Elemente oder Indices mit einander vertauscht u. s. w.

Aus diesem Grunde erhält man aus dem angegebenen ersten positiven Gliede der Entwickelung von P alle Glieder der Entwickelung durch Permutation aller $n+1$ Elemente oder Indices, indem man die Exponenten ungeändert lässt. Die Vorzeichen dieser so gebildeten $1.2\ldots(n+1)$ Glieder richten sich nach dem ersten Gliede in der Art, dass ein bestimmtes Glied das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nachdem es aus dem ersten durch eine gerade oder durch eine ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist.

Ist zum Beispiel $n=2$, so erhält man auf die angegebene Art die Entwickelung des Products $P=(a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_2-a_1)$ aus dem ersten Gliede $a_0^0\, a_1^1\, a_2^2$:

$$P = a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_2^1 a_1^2 + a_1^0 a_2^1 a_0^2 - a_1^0 a_0^1 a_2^2 + a_2^0 a_0^1 a_1^2 - a_2^0 a_1^1 a_0^2.$$

Man kann aber auch aus dem angegebenen ersten positiven Gliede der Entwickelung des Products P alle übrigen Glieder durch Permutation der Exponenten herleiten, indem man die Indices ungeändert lässt. Das Vorzeichen eines so gebildeten Gliedes ist wieder das positive oder negative, je nachdem das Glied aus dem ersten positiven durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Exponenten entstanden ist.

Denn ist ein Glied der Entwickelung von P:

$$\pm\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

so weiss man, dass dieses ein zweites von entgegengesetztem Vorzeichen bedingt:

$$\mp\ a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_\varkappa} a_\varkappa^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

welche Glieder, abgesehen von den Vorzeichen, in einander übergehen, wenn man $a_\varkappa$ mit a_λ vertauscht. Diese Glieder gehen aber, abgesehen von den Vorzeichen, auch in einander über, wenn man die Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ mit einander vertauscht. Das erste angegebene Glied bedingt also das zweite von entgegengesetztem Vorzeichen, welches aus ihm durch Vertauschung irgend zweier Exponenten $\alpha_\varkappa$ und α_λ erhalten wird. Demnach gilt dasselbe von den Exponenten, was im Vorhergehenden von den Indices nachgewiesen worden ist.

Wenn man in der angegebenen Entwickelung des Productes P die Exponenten $0, 1 \ldots n$ der $n+1$ Elemente obere Indices bedeuten lässt, so hat man in der Voraussetzung, dass $a_\varkappa^\lambda$ Symbole seien für irgend welche Grössen, die sich mit $\varkappa$ und λ ändern, einen Ausdruck A von $(n+1)^2$ Elementen $a_\varkappa^\lambda$, den man Determinante nennt.

Wie nun die Glieder der Entwickelung des Productes P aus dem ersten angegebenen positiven entstehen durch Permutation der unteren Indices oder durch Permutation der Exponenten, so ergeben sich auch aus dem ersten positiven Gliede der Determinante alle übrigen Glieder derselben, entweder durch Permutation der unteren oder der oberen Indices. Man braucht also nur das erste positive Glied der Determinante zu kennen, um alle übrigen Glieder derselben mit dem positiven oder negativen Vorzeichen aus demselben abzuleiten. Daher bezeichnet man die Determinante A, indem man nur das erste positive Glied anmerkt, mit dem Zeichen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n.$$

Doch reicht diese Bezeichnung nicht aus in den Fällen, wo specielle Operationen mit den Elementen selbst auszuführen sind. In diesen Fällen bedient man sich, indem man alle Elemente der Determinante angiebt, der Bezeichnung:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Zieht man aber in Erwägung, dass alle Glieder der Determinante aus dem ersten positiven Gliede entstehen durch Permutation der oberen oder der unteren Indices, dass das erste Glied selbst ungeändert bleibt, wenn man in jedem Elemente den oberen Index mit dem unteren vertauscht, so sieht man ein, dass man auch in der Determinante den oberen Index eines jeden Elementes mit dem unteren vertauschen kann ohne die Determinante selbst zu ändern. Man hat daher:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \ldots & a_0^n \\ a_1^0, & a_1^1, & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^0, & a_n^1, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Die Determinante A zeigt Eigenschaften, die den hervorgehobenen Eigenschaften des Productes P ganz ähnlich sind, und welche sich also ausdrücken lassen:

(4) . . . Die Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei untere oder zwei obere Indices der Elemente mit einander vertauscht.

(5) . . . Die Determinante verschwindet, wenn man für einen unteren Index der Elemente einen anderen unteren Index, oder wenn man für einen oberen Index der Elemente einen anderen oberen Index setzt.

Diese Eigenschaften der Determinante A ergeben sich aus der Betrachtung der Summe der beiden zuletzt angegebenen Glieder der Entwickelung von P, die in die entsprechenden Determinantenglieder übergehen, wenn man die Exponenten in denselben als obere Indices betrachtet. Denn auch die Summe der beiden Determinantenglieder ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man $a_\varkappa$ mit a_λ vertauscht, oder $\alpha_\varkappa$ mit α_λ; sie verschwindet, wenn man für a_λ setzt $a_\varkappa$, oder für α_λ setzt $\alpha_\varkappa$. Da nun die ganze Determinante aus solchen Gliederpaaren besteht, die dieselbe Eigenschaft haben, so theilt die Determinante diese Eigenschaft mit ihnen.

Um noch andere Formen der Determinante A hervorzuheben, deren Bildungsgesetz auseinandergesetzt worden ist, betrachte man ein beliebiges Glied derselben:

$$\pm\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \ldots a_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Dasselbe hat den Factor $a_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$. Da nun $\alpha_\varkappa$ irgend eine der Zahlen $0, 1 \ldots n$ bedeutet, so sieht man, dass jedes Glied der Determinante einen Factor hat $a_\varkappa$ mit irgend einem der oberen Indices $0, 1 \ldots n$. Bezeichnet man daher mit $A_\varkappa^\lambda\, a_\varkappa^\lambda$ die Summe der Glieder, welche den Factor $a_\varkappa^\lambda$ haben, so stellt sich die Determinante A dar als die Summe von Producten, wie folgt:

(6) . . . . $A = A_\varkappa^0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\varkappa^n,$

wobei zu bemerken ist, dass die Ausdrücke $A_\varkappa^0, A_\varkappa^1 \ldots A_\varkappa^n$ die Elemente $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$ nicht enthalten. Denn enthielte einer dieser Ausdrücke noch eines der angegebenen Elemente, so würde ein Glied der Entwickelung von A zwei Factoren haben mit demselben unteren Index $\varkappa$.

Aber jedes Glied der Determinante A hat auch den Factor $a^\varkappa$ mit irgend einem unteren Index $0, 1 \ldots n$. Es stellt sich daher die Determinante, wenn man wie vorhin mit $A_\lambda^\varkappa a_\lambda^\varkappa$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche den Factor $a_\lambda^\varkappa$ haben, auch so dar:

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad A = A_0^\varkappa a_0^\varkappa + A_1^\varkappa a_1^\varkappa + \ldots A_n^\varkappa a_n^\varkappa,$$

indem $A_0^\varkappa, A_1^\varkappa \ldots A_n^\varkappa$ Ausdrücke bedeuten, die die Elemente $a_0^\varkappa, a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$ nicht enthalten. Daraus folgt, dass der Ausdruck $A_\varkappa^\lambda$ weder die Elemente $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$, noch die Elemente $a_0^\lambda, a_1^\lambda \ldots a_n^\lambda$ enthält. Setzt man daher in (6) statt des unteren Index $\varkappa$ der Elemente durchweg einen anderen unteren Index λ, oder in (7) statt des oberen Index $\varkappa$ der Elemente durchweg einen anderen oberen Index λ, so erhält man mit Rücksicht auf (5):

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad 0 = A_\varkappa^0 a_\lambda^0 + A_\varkappa^1 a_\lambda^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n.$$

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad 0 = A_0^\varkappa a_0^\lambda + A_1^\varkappa a_1^\lambda + \ldots A_n^\varkappa a_n^\lambda.$$

Die $(n+1)^2$ eingeführten Ausdrücke $A_\varkappa^\lambda$ lassen sich auch als die partiellen Differentialquotienten der Determinante A, nach den Elementen derselben genommen, darstellen. Denn differenzirt man die Gleichung (6) oder (7) partiell nach $a_\varkappa^\lambda$, so erhält man:

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dA}{da_\varkappa^\lambda} = A_\varkappa^\lambda.$$

Sie lassen sich aber auch als Determinanten darstellen. Denn setzt man zum Beispiel $\varkappa = a_0^1 = a_0^2 \ldots = a_0^n = 0$, so erhält man aus (6) mit Rücksicht auf (2):

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ 0, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = A_0^0 a_0^0;$$

Ebenso erhält man aus (7), wenn man setzt $x = a_1^0 = a_2^0 \ldots = a_n^0 = o$, mit Rücksicht auf (2):

$$(12) \ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} a_0^0, & o, & \ldots, & o \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = A_0^0 \, a_0^0.$$

Geht man aber auf die Bildungsweise der Determinante A aus ihrem ersten positiven Gliede zurück und permutirt alle oberen Indices $1, 2 \ldots n$ oder alle unteren Indices $1, 2 \ldots n$ (mit der Anmerkung des richtigen Vorzeichens eines jeden Gliedes), so sieht man, dass man nicht alle Glieder der Determinante erhält, sondern nur die Glieder, welche den Factor a_0^0 haben. Da die Summe dieser Glieder aber ist: $A_0^0 \, a_0^0$, so hat man mit Unterdrückung des Factors a_0^0:

$$(13) \ldots\ldots\ldots A_0^0 = \Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \ldots a_n^n,$$

woraus man durch Vergleichung mit (11) und (12) erhält:

$$(14) \ldots \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ o, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^0, & o, & \ldots & o \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = a_0^0 \, \Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \ldots a_n^n.$$

In gleicher Weise erhält man aus dem ersten positiven Gliede der Determinante A durch Permutation der oberen oder der unteren Indices $0, 1 \ldots (n-1)$ die Summe der mit a_n^n multiplicirten Glieder $a_n^n \, \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}$ der Determinante. Da diese Summe aber gleich ist $A_n^n \, a_n^n$, so hat man mit Unterdrückung des Factors a_n^n:

$$(15) \ldots\ldots\ldots A_n^n = \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}.$$

Setzt man in der Gleichung (7), in welcher $x = n$ sei, $a_n^n + p$ für a_n^n, so geht dieselbe über in:

$$\begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & (a_n^n + p) \end{vmatrix} = A_0^n \, a_0^n + A_1^n \, a_1^n + \ldots A_n^n \, a_n^n + A_n^n \, p$$

$$= A + A_n^n \, p,$$

oder in:

$$(16)\ \ldots \begin{vmatrix} a_0^0, a_1^0, \ldots a_n^0 \\ a_0^1, a_1^1, \ldots a_n^1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0^n, a_1^n, \ldots (a_n^n + p) \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_0^0 a_0^1 \ldots a_n^n + p \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}.$$

Die Gleichungen (6) bis (9) dienen zur Auflösung zweier Systeme linearer Gleichungen mit den $(n + 1)$ Unbekannten $x_0, x_1 \ldots x_n$ und den $(n + 1)$ Unbekannten $Y_0, Y_1 \ldots Y_n$, die sich unter der Voraussetzung, dass λ die Zahlen bedeutet $0, 1 \ldots n$, in abgekürzter Form also darstellen:

$$(17)\ \ldots\ldots\ X_\lambda = a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots a_n^\lambda x_n.$$

$$(18)\ \ldots\ldots\ y_\lambda = a_\lambda^0 Y_0 + a_\lambda^1 Y_1 + \ldots a_\lambda^n Y_n.$$

Multiplicirt man nämlich (17) mit $A_\varkappa^\lambda$, setzt für λ alle Zahlen $0, 1 \ldots n$ und addirt; oder multiplicirt (18) mit $A_\lambda^\varkappa$, setzt für λ alle Zahlen $0, 1 \ldots n$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (6) bis (9):

$$(19)\ \ldots\ldots\ A x_\varkappa = A_\varkappa^0 X_0 + A_\varkappa^1 X_1 + \ldots A_\varkappa^n X_n.$$

$$(20)\ \ldots\ldots\ A Y_\varkappa = A_0^\varkappa y_0 + A_1^\varkappa y_1 + \ldots A_n^\varkappa y_n.$$

Diese beiden Gleichungen repräsentiren wieder zwei Systeme von Gleichungen, da $\varkappa$ die Zahlen bedeutet $0, 1 \ldots n$, und geben die Werthe der Unbekannten $x_\varkappa$ als lineare Ausdrücke der $X_\varkappa$ und die Werthe der Unbekannten $Y_\varkappa$ als lineare Ausdrücke der $y_\varkappa$.

Die beiden gegebenen Systeme linearer Gleichungen (17), (18) haben dieselben $(n + 1)^2$ Coefficienten $a_\varkappa^\lambda$ der Unbekannten, nur ihre Anordnung ist verschieden. Jede $\varkappa$te Horizontalreihe der Coefficienten in dem einen Systeme ist gerade die $\varkappa$te Verticalreihe des anderen Systemes. Dasselbe trifft auch bei den aufgelösten Gleichungen (19), (20) zu, wie die Ansicht dieser Gleichungen lehrt. Deshalb braucht man nur das eine von den beiden Systemen (17), (18) wirklich aufzulösen. Die Auflösung des anderen ergiebt sich nach dieser Bemerkung von selbst.

Die Gleichungen (19), (20) nehmen die einfachere Gestalt an:

$$(21)\ \ldots\ldots\ x_\varkappa = e_\varkappa^0 X_0 + e_\varkappa^1 X_1 + \ldots e_\varkappa^n X_n,$$

$$(22)\ \ldots\ldots\ Y_\varkappa = e_0^\varkappa y_0 + e_1^\varkappa y_1 + \ldots e_n^\varkappa y_n,$$

wenn man der Kürze wegen setzt $\frac{A_\varkappa^\lambda}{A} = e_\varkappa^\lambda$. Man kann daher die hervorgehobene Bemerkung als Satz also aussprechen:

(23) . . . Wenn (21) die Auflösungen sind des Systemes linearer Gleichungen (17), so sind (22) die Auflösungen des Systemes linearer Gleichungen (18).

Nimmt man an, um einen speciellen Fall zu betrachten, dass für alle Werthe von $\varkappa$ und λ sei $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$, so wird die $\varkappa$te Horizontalreihe der Coefficienten in (17) gleich der $\varkappa$ten Vertikalreihe in denselben Gleichungen, und diese Gleichungen gehen, abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten, in (18) über, wenn man setzt $X_\varkappa = y_\varkappa$. Da aber unter dieser Annahme die Werthe der Unbekannten, die durch (21) und (22) ausgedrückt sind, einander gleich sein müssen, welches auch die Werthe von $X_\varkappa$ seien, so ergiebt sich aus dem Vergleich von (21) und (22), dass auch $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$.

Zu demselben Resultat gelangt man auch durch den Vergleich der Gleichungen (6), (8) mit den Gleichungen (7), (9). Die Gleichungen (6), (8) stellen nämlich, wenn $\lambda = 0, 1 \ldots n$, ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen dar. Ein zweites System stellen unter derselben Voraussetzung die Gleichungen (7), (9) dar. Betrachtet man in dem ersten System $A_\varkappa^0, A_\varkappa^1 \ldots A_\varkappa^n$ als die Unbekannten, in dem zweiten System $A_0^\varkappa, A_1^\varkappa \ldots A_n^\varkappa$ als die Unbekannten, so hat man zwei Systeme linearer Gleichungen, die sich, wenn, für alle Werthe von $\varkappa$ und λ, $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$ ist, nur durch die Bezeichnung der Unbekannten von einander unterscheiden. Man hat daher $A_\varkappa^0 = A_0^\varkappa$, $A_\varkappa^1 = A_1^\varkappa \ldots A_\varkappa^n = A_n^\varkappa$, woraus, wie vorhin, folgt $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$.

Lineare Gleichungen von der beschriebenen Art treten auf, wenn man für die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function der zweiten Ordnung neue Variable einführt. Denn bezeichnet man die Summe $\Sigma a_\varkappa^\lambda x_\varkappa x_\lambda$, eine Function der zweiten Ordnung in Rücksicht auf die Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_n$, mit dem Zeichen:

(24) . . . . $f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \Sigma a_\varkappa^\lambda x_\varkappa x_\lambda$,

so kann man durch Einführung der neuen Variabeln $X_\varkappa$ und unter der Voraussetzung, dass $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$, die Gleichungen (17) also darstellen:

(25) . . . . $X_\varkappa = \frac{1}{2} f'(x_\varkappa)$.

Ihre Auflösungen (21) nehmen, wenn man die Function F definirt als die Summe:

(26) . . . . $F(X_0, X_1, \ldots X_n) = \Sigma e_\varkappa^\lambda X_\varkappa X_\lambda$,

da $e_\varkappa^\lambda = e_\lambda^\varkappa$ ist, eine eben so einfache Gestalt an, nämlich:

(27) . . . . $x_\varkappa = \frac{1}{2} F'(X_\varkappa)$.

Diese Bemerkungen lassen sich kurz in folgendem Satze zusammenfassen:

(28) . . . . Wenn man lineare Gleichungen von der Form (25) auflöset, so stellen sich die aufgelösten Gleichungen unter der Form (27) dar.

Die Function F nennt man die reciproke Function der Function f und umgekehrt f die reciproke Function von F. Wie die eine Function von der anderen abgeleitet werden kann, ist aus dem Vorhergehenden klar.

Aus der Darstellung der Determinante A in (6) und (7) lassen sich noch andere Sätze entwickeln. Man kann nämlich in dieser Darstellung bemerken, dass A in ϱA übergeht, wenn man für $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$ respective setzt $\varrho a_\varkappa^0, \varrho a_\varkappa^1 \ldots \varrho a_\varkappa^n$, oder wenn man für $a_0^\varkappa, a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$ respective setzt $\varrho a_0^\varkappa, \varrho a_1^\varkappa \ldots \varrho a_n^\varkappa$. Daher hat man den Satz:

(29) . . . . Wenn man sämmtliche Elemente einer Horizontalreihe oder sämmtliche Elemente einer Verticalreihe der Determinante mit demselben Factor multiplicirt, so geht die Determinante über in das Product der Determinante und dieses Factors.

Setzt man in (6) $a_\varkappa^0 + \varrho a_\lambda^0, a_\varkappa^1 + \varrho a_\lambda^1 \ldots a_\varkappa^n + \varrho a_\lambda^n$ respective für $a_\varkappa^0, a_\varkappa^1 \ldots a_\varkappa^n$, so wird diese Gleichung nicht geändert, weil der Factor von ϱ im rechten Theile der Gleichung

auf Grund von (8) verschwindet. Ebenso ändert sich auch die Gleichung (7) nicht, wenn man $a_0^\varkappa + \varrho a_0^\lambda$, $a_1^\varkappa + \varrho a_1^\lambda \ldots a_n^\varkappa + \varrho a_n^\lambda$ respective setzt für $a_0^\varkappa$, $a_1^\varkappa \ldots a_n^\varkappa$, weil auf Grund von (9) der Factor von ϱ im rechten Theile der Gleichung verschwindet. Diese Bemerkungen drücken wir als Satz so aus:

(30) . . . . Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man in ihr eine Horizontalreihe oder Verticalreihe der Elemente vermehrt um die mit demselben Factor multiplicirten correspondirenden Elemente einer anderen Horizontalreihe oder Verticalreihe.

Man kann hiernach die Elemente einer Horizontalreihe oder Verticalreihe auch vermehren um die correspondirenden Elemente mehrerer anderer Horizontalreihen oder Verticalreihen, jede der letzteren Reihen mit einem anderen Factor multiplicirt, ohne die Determinante dadurch zu ändern.

Wir schliessen diese Vorlesung mit dem Hauptsatze der Multiplication zweier Determinanten.

(31) . . . . Wenn:

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \ldots a_n^\varkappa b_n^\lambda,$$

so ist:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n \,.\, \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n.$$

Die Bedingung dieses Satzes lässt sich kürzer so ausdrücken:

$$c_\varkappa^\lambda = \Sigma_m \, a_m^\varkappa \, b_m^\lambda.$$

Demnach ist das erste positive Glied der aus den Elementen c zusammengesetzten Determinante:

$$c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0} a_{m_0}^0 b_{m_0}^0 \,.\, \Sigma_{m_1} a_{m_1}^1 b_{m_1}^1 \ldots \Sigma_{m_n} a_{m_n}^n b_{m_n}^n,$$

wo $m_0, m_1 \ldots m_n$ die Zahlen $0, 1 \ldots n$ bedeuten. Diese Gleichung kann man auch so darstellen:

$$c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \left(a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n \,.\, b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n\right).$$

Aus diesem ersten Gliede der Determinante entspringen nun alle übrigen Glieder derselben durch Permutation der unteren Indices der Elemente c. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die oberen Indices der Elemente a per-



mutirt, während die Indices der Elemente b ganz ungeändert bleiben. Man hat daher:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \ldots m_n} \left[\left(\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n \right) . b_{m_0}^0 b_{m_1}^1 \ldots b_{m_n}^n \right].$$

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n$ verschwindet nach (5), so oft zwei von den Indices $m_0, m_1 \ldots m_n$ einander gleich sind, und mit ihr die entsprechenden Glieder der Summe des rechten Theiles der letzten Gleichung. Da also in dieser Summe die Glieder fehlen, in welchen zwei oder mehrere Indices $m_0, m_1 \ldots m_n$ einander gleich sind, so bedeuten $m_0, m_1 \ldots m_n$ nur die Zahlen $0, 1 \ldots n$ in irgend einer Reihenfolge.

Die Determinante $\Sigma \pm a_{m_0}^0 a_{m_1}^1 \ldots a_{m_n}^n$ ist aber unter dieser Voraussetzung nach (4) gleich $\pm \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$, je nachdem die Permutation $m_0 m_1 \ldots m_n$ aus der Permutation $0\ 1 \ldots n$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen zweier Indices hervorgegangen ist. Setzt man demnach für diese Determinante ihren angegebenen Werth in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n . \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n.$$

Achte Vorlesung.

Ganze homogene Functionen.

Von gleicher Wichtigkeit als die Determinanten sind die Eigenschaften der ganzen homogenen Functionen für die analytische Geometrie. Diese Eigenschaften, insofern sie in dem Folgenden eine Anwendung finden, werden den Gegenstand der gegenwärtigen Vorlesung bilden.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der ganzen homogenen Function:

(1) . . . . $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$

von $n+1$ Variabeln $x_0, x_1, \ldots x_n$ vom $p$ten Grade, dass:

(2) . . . . . $t^p f(x_0, x_1, \ldots x_n) = f(x_0 t, x_1 t, \ldots x_n t)$.

Denn wenn eine ganze Function (1) der Gleichung (2) genügt, so ist sie zugleich eine homogene Function.

Die Gleichung (2) hat man als eine identische Gleichung zu betrachten, in welcher die beiden Theile der Gleichung sich nur in der Form von einander unterscheiden.

Differenzirt man daher die Gleichung (2) nach t, und setzt nach der Differentiation $t = 1$, so erhält man die identische Gleichung:

$$(3) \ldots p.f(x_0, x_1, \ldots x_n) = x_0 f'(x_0) + x_1 f'(x_1) + \ldots x_n f'(x_n).$$

Die zweimalige Differentiation nach t ergiebt, wenn man wieder $t = 1$ setzt, folgende identische Gleichung:

$$(4) \ldots p(p-1) f(x_0, x_1, \ldots x_n) = x_0^2 \frac{d^2 f}{dx_0^2} + x_1^2 \frac{d^2 f}{dx_1^2} + \ldots 2.x_0 x_1 \frac{d^2 f}{dx_0 dx_1} + \ldots$$

Durch dreimalige, viermalige Differentiation lassen sich aus (2) in gleicher Weise neue identische Gleichungen herleiten, auf welche wir weiter kein Gewicht legen, weil wir von ihnen im Folgenden keine Anwendung machen werden.

Es seien nun $a^0, a^1, \ldots a^n$, $n + 1$ gegebene ganze homogene Functionen der Variabeln $x_0, x_1, \ldots x_n$ respective von den Graden $p_0, p_1, \ldots p_n$. Bezeichnet man die Differentialquotienten dieser Functionen, nach den $n + 1$ Variabeln genommen, der Kürze wegen mit den Zeichen $\frac{d a^\lambda}{d x_\varkappa} = a_\varkappa^\lambda$, so hat man nach (3) das System identischer Gleichungen:

$$(5) \ldots \begin{array}{l} p_0 a^0 = a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + \ldots a_n^0 x_n \\ p_1 a^1 = a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + \ldots a_n^1 x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n a^n = a_0^n x_0 + a_1^n x_1 + \ldots a_n^n x_n. \end{array}$$

Diese Gleichungen kann man als lineare betrachten, wenn man die Variabeln $x_0, x_1, \ldots x_n$, wie sie zu Tage treten, nicht wie sie in den Functionen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und in ihren Differentialquotienten enthalten sind, als die Unbekannten ansieht. In dieser Voraussetzung haben sie die Form der Gleichungen (17) der vorhergehenden Vorlesung, welche durch Auflösung die Gleichungen (19) ergaben.

Löset man daher die identischen Gleichungen (5) nach den bezeichneten Unbekannten auf, so erhält man ebenfalls identische Gleichungen, die wir in folgender zusammenfassen können:

$$(6) \ldots \quad A . x_\varkappa = A_\varkappa^0 \, p_0 \, a^0 + A_\varkappa^1 \, p_1 \, a^1 + \ldots A_\varkappa^n \, p_n \, a^n.$$

In ihr haben A und $A_\varkappa^\lambda$ die Bedeutung einer Determinante und ihres partiellen Differentialquotienten, nämlich:

$$(7) \ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad A_\varkappa^\lambda = \frac{dA}{da_\varkappa^\lambda}.$$

Die Determinante A führt den Namen der **Determinante der Functionen** $a^0, a^1, \ldots a^n$, aus deren Differentialquotienten sie zusammengesetzt ist. Sie verschwindet nach (6) für dasjenige System Werthe der Variabeln, für welches die Functionen verschwinden, aus deren partiellen Differentialquotienten sie zusammengesetzt ist. Man hat daher den Satz:

(8) . . . . **Wenn $n+1$ ganze homogene Functionen von eben so vielen Variabeln für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen für dasselbe System Werthe der Variabeln.**

Durch Differentiation der identischen Gleichung (6) nach $x_\varkappa$ erhält man die ebenfalls identische Gleichung:

$$A + \frac{dA}{dx_\varkappa} x_\varkappa = A_\varkappa^0 \, p_0 \, a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 \, p_1 \, a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n \, p_n \, a_\varkappa^n$$
$$+ \frac{dA_\varkappa^0}{dx_\varkappa} p_0 \, a^0 + \frac{dA_\varkappa^1}{dx_\varkappa} p_1 \, a^1 + \ldots \frac{dA_\varkappa^n}{dx_\varkappa} p_n \, a^n.$$

Zieht man von dieser Gleichung die mit p_0 multiplicirte Gleichung (6):

$$A = A_\varkappa^0 \, a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 \, a_\varkappa^1 + \ldots A_\varkappa^n \, a_\varkappa^n$$

aus der vorhergehenden Vorlesung ab, so erhält man:

$$A(1-p_0) + \frac{dA}{dx_\varkappa} x_\varkappa = A_\varkappa^1 \, a_\varkappa^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n \, a_\varkappa^n (p_n - p_0)$$
$$(9) \ldots \ldots \quad + \frac{dA_\varkappa^0}{dx_\varkappa} p_0 \, a^0 + \frac{dA_\varkappa^1}{dx_\varkappa} p_1 \, a^1 + \ldots \frac{dA_\varkappa^n}{dx_\varkappa} p_n \, a^n.$$

Differenzirt man dagegen die Gleichung (6) nach x_λ, so erhält man, wenn man die mit p_0 multiplicirte Gleichung (8):

$$o = A_\varkappa^0 a_\lambda^0 + A_\varkappa^1 a_\lambda^1 + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n$$

der letzten Vorlesung abzieht:

$$(10) \ldots \frac{dA}{dx_\lambda} x_\varkappa = A_\varkappa^1 a_\lambda^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n (p_n - p_0) + \frac{dA_\varkappa^0}{dx_\lambda} p_0 a^0 + \frac{dA_\varkappa^1}{dx_\lambda} p_1 a^1 + \ldots + \frac{dA_\varkappa^n}{dx_\lambda} p_n a^n.$$

Wenn nun für ein System Werthe der Variabeln die Functionen $a^0, a^1, \ldots a^n$ sämmtlich verschwinden, so erhält man, da unter dieser Voraussetzung auch A verschwindet, für dieses System Werthe aus (9) und (10) die freilich nicht mehr identischen Gleichungen:

$$(11) \ldots \begin{cases} \dfrac{dA}{dx_\varkappa} x_\varkappa = A_\varkappa^1 a_\varkappa^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n a_\varkappa^n (p_n - p_0), \\ \dfrac{dA}{dx_\lambda} x_\varkappa = A_\varkappa^1 a_\lambda^1 (p_1 - p_0) + \ldots A_\varkappa^n a_\lambda^n (p_n - p_0), \end{cases}$$

deren rechte Seiten verschwinden, wenn $p_0 = p_1 = \ldots = p_n$. Daraus folgt der Satz:

(12) . . . . Wenn $n+1$ ganze homogene Functionen von eben so vielen Variabeln und von gleichen Graden für ein System Werthe der Variabeln verschwinden, so verschwinden auch die Determinanten dieser Functionen und ihre ersten partiellen Differentialquotienten für dasselbe System Werthe der Variabeln.

Sind dagegen $p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1}$, und von p_n verschieden, so hat man nach (11):

$$(13) \ldots \begin{cases} \dfrac{dA}{dx_\varkappa} = a_\varkappa^n \,.\, A_\varkappa^n \dfrac{(p_n - p_0)}{x_\varkappa}, \\ \dfrac{dA}{dx_\lambda} = a_\lambda^n \,.\, A_\varkappa^n \dfrac{(p_n - p_0)}{x_\varkappa}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen beweisen den Satz:

(14) . . . . Wenn von $n+1$ ganzen homogenen Functionen eben so vieler Variabeln n Functionen von demselben Grade sind, und es verschwinden alle $n+1$ Functionen für ein System Werthe der Variabeln, so sind für dieses System Werthe der Variabeln die partiellen Differentialquotienten der Determinante der $n+1$ Functionen proportional den entsprechenden partiellen Differentialquotienten der ungleichgradigen Function.

Mit derselben Leichtigkeit lässt sich endlich aus den Gleichungen (11) der allgemeinere Satz ablesen:

(15) . . . . Wenn von $n+1$ ganzen homogenen Functionen $a^0, a^1, \ldots a^n$ von eben so vielen Variabeln die Functionen $a^0, a^1, \ldots a^{m-1}$ von demselben Grade sind, und es verschwinden sämmtliche $n+1$ Functionen für ein System Werthe der Variabeln, so hat man für dieses System Werthe der Variabeln die Gleichungen:

$$\frac{dA}{dx_\lambda} = P_m \frac{da^m}{dx_\lambda} + P_{m+1} \frac{da^{m+1}}{dx_\lambda} + \ldots P_n \frac{da^n}{dx_\lambda},$$

in welchen die Ausdrücke $P_m, P_{m+1}, \ldots P_n$ unabhängig sind von dem besonderen Werthe von λ.

Wir legen auf diese vier Sätze deshalb ein Gewicht, weil sie lehren, in ähnlicher Weise, wie Bezout und Sylvester die Elimination der Variabeln aus zwei Gleichungen von höheren Graden zurückführen auf die Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen, so, wenigstens in manchen Fällen, wo die Theorie noch hinter den Anforderungen zurückbleibt, die Elimination der Variabeln aus mehr als zwei Gleichungen ebenfalls auf die Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen zurück zu führen. Die Untersuchungen in der nächsten Vorlesung werden Beispiele dazu bieten.

Zum Schlusse wollen wir eine Anwendung des ersten von diesen vier Sätzen machen, indem wir die Bedingung suchen, welche die homogenen Coordinaten von vier Punkten $(x_0\, y_0\, z_0\, p_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1\, p_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2\, p_2)$, $(x_3\, y_3\, z_3\, p_3)$ erfüllen müssen, wenn dieselben auf irgend einer Ebene:

$$ux + vy + wz + rp = o$$

liegen sollen.

Diese Bedingungen sind:

$$\begin{aligned} ux_0 + vy_0 + wz_0 + rp_0 &= o \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + rp_1 &= o \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + rp_2 &= o \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + rp_3 &= o. \end{aligned}$$

Man hat hier also vier lineare homogene Functionen der Variabeln u, v, w, r, welche für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden. Der Satz (8) giebt die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & p_0 \\ x_1, & y_1, & z_1, & p_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & p_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & p_3 \end{vmatrix} = o.$$

Man drückt dieselbe durch rechtwinklige Coordinaten der vier Punkte aus, indem man $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$ setzt:

$$(17) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Aber dieses ist eine andere Form für dieselbe Bedingungsgleichung, die wir in der ersten Vorlesung unter (18) durch $6\,\Pi = o$ ausgedrückt haben. Um den linken Theil der zuletzt angeführten Gleichung (16) auf die Form von $6\,\Pi$ zurückzuführen, hat man mehrere Sätze der siebenten Vorlesung in Anwendung zu bringen. Derselbe erhält durch mehrmalige Anwendung des Stazes (4) schliesslich die Gestalt:

$$- \begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0 \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck geht durch wiederholte Anwendung des Satzes (30) über in:

$$- \begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0, \\ 0, & x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ 0, & x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ 0, & x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

und erhält nach (14) die Gestalt:

$$- \begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = -6\,\Pi.$$

Neunte Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wie man die Ebene als den geometrischen Ort eines Punktes betrachten kann, dessen rechtwinklige Coordinaten einer gegebenen linearen Gleichung genügen, so werden wir den geometrischen Ort eines Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten einer gegebenen Gleichung des zweiten Grades:

$$f(x, y, z) = o$$

genügen, eine **Oberfläche zweiter Ordnung** nennen, und die gegebene Gleichung die Gleichung dieser Oberfläche.

Die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist hiernach aus 10 Gliedern zusammengesetzt, die respective die Factoren haben: x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, x, y, z, 1, und jeder dieser Factoren hat seinen Coefficienten. Von diesen 10 Coefficienten kann

jedoch einer, zum Beispiel der letzte, auf die Einheit zurückgeführt werden, indem man die Gleichung der Oberfläche durch ihn dividirt. In der auf diese Weise vereinfachten Gleichung der Oberfläche bleiben nur 9 Coefficienten zurück, die linear in die Gleichung eingehen und deren Werthe die Natur der Oberfläche bestimmen.

Diese 9 Coefficienten können nicht mehr willkürlich sein, wenn die Oberfläche durch einen gegebenen Punkt gehen soll, sie müssen vielmehr der linearen Gleichung genügen, die man erhält, wenn man in der Gleichung der Oberfläche für die variabeln Coordinaten setzt die Coordinaten des gegebenen Punktes.

Es werden daher 9 solcher Bedingungsgleichungen erfordert, um die 9 Coefficienten, und dadurch die Oberfläche selbst unzweideutig zu bestimmen. Aber nicht jede 9 Punkte bestimmen die Oberfläche unzweideutig. Denn wenn man die 9 Punkte so wählt, dass von den 9 Bedingungsgleichungen eine oder mehrere aus den übrigen folgen, so hat man nicht mehr die hinreichende Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den 9 zu bestimmenden Coefficienten. Daher drücken wir die gemachten Bemerkungen kurz so aus:

Durch 9 beliebig gewählte Punkte im Raume lässt sich im Allgemeinen nur eine einzige Oberfläche zweiter Ordnung hindurchlegen, und diese Oberfläche ist in allen ihren Theilen durch die 9 gewählten Punkte unzweideutig bestimmt.

Es bietet sich zunächst die Aufgabe dar: wenn 9 Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung gegeben sind, einen beliebigen zehnten Punkt der Oberfläche zu construiren, etwa den Punkt, in welchem eine, beliebig durch einen der 9 gegebenen Punkte gelegte, gerade Linie die Oberfläche schneidet. Diese Aufgabe hat zwar ihre Lösung gefunden in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 24, p. 36, aber sie entbehrt noch der Einfachheit und Eleganz, wodurch sich die Auflösung der analogen Aufgabe in der Ebene durch den Pascal'schen Satz auszeichnet.

Acht beliebig gewählte Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung bestimmen dieselbe nicht vollständig. Denn die 9 Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche brauchen ja nur 8 linearen Bedingungsgleichungen zu genügen. Aber es lassen sich durch

diese 8 Bedingungsgleichungen 8 Coefficienten durch den neunten ausdrücken, den wir mit λ bezeichnen wollen, und der ganz willkürlich bleibt.

Sämmtliche Ausdrücke für die 8 Coefficienten sind von der Form $\alpha - \beta\lambda$, wo α und β Functionen bedeuten der Coordinaten der gegebenen 8 Punkte, die mit den 8 Punkten gegeben sind. Setzt man diese Ausdrücke für die 8 Coefficienten in die Gleichung der Oberfläche ein, so hat man die Gleichung der Oberfläche, welche durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht, und die Gleichung selbst stellt sich, wenn man die Glieder zusammenfasst, welche unabhängig von λ sind, ebenso die Glieder, welche den Factor λ haben, unter der Form dar:

$$\varphi(x, y, z) - \lambda\psi(x, y, z) = o.$$

Diese Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ umfasst alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgehen. Denn da die Oberfläche erst durch 9 Punkte vollständig bestimmt ist, so kann man den Factor λ immer so bestimmen, dass die Oberfläche noch durch einen gegebenen neunten Punkt hindurchgeht.

Die Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z) = o, \quad \psi(x, y, z) = o$$

stellen zwei Oberflächen zweiter Ordnung dar, von denen jede durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht. Sie schneiden sich in einer Raumcurve, welche ebenfalls durch die gegebenen 8 Punkte hindurchgeht. Diese Curve enthält ausser diesen 8 Punkten noch unendlich viele andere, die aber alle durch die 8 Punkte bestimmt sind und welche auch auf der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung liegen, die durch die gegebenen 8 Punkte gelegt ist. Wir drücken diese Bemerkungen als Satz kurz so aus:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 8 beliebig gewählte Punkte des Raumes hindurchgehen, gehen im Allgemeinen zugleich durch eine durch die 8 Punkte bestimmte Raumcurve, in welcher sich je zwei von den genannten Oberflächen schneiden.

Da diese Raumcurve, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, durch beliebige 8 in ihr gewählte Punkte bestimmt ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, einen be-

liebigen neunten Punkt der Curve zu construiren. Diese Aufgabe ist bisher nicht gelöset worden, und es scheint, dass die Auflösung nicht mehr linear sein kann, das heisst, nicht durch Construction allein von Ebenen und geraden Linien ausführbar.

Sollen hiernach 9 Punkte des Raumes eine Oberfläche zweiter Ordnung unzweideutig bestimmen, so dürfen sie nicht auf einer Raumcurve liegen, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung $\varphi = o$ und $\psi = o$ schneiden. Denn durch alle Punkte dieser Curve geht die ganze Schaar der Oberflächen $\varphi - \lambda \psi = o$ hindurch, weil die Coordinaten aller Punkte, welche die beiden ersten Gleichungen erfüllen, auch der letzten genügen. Zugleich sieht man aber auch, dass zur Bestimmung einer Oberfläche zweiter Ordnung beliebige 8 auf ihr gewählte Punkte aequivalent sind mit der durch die 8 Punkte gelegten Raumcurve, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden.

Ein specieller Fall der Oberflächen zweiter Ordnung ist ein Ebenenpaar. Denn wenn:

$$A = o, \quad B = o$$

die Gleichungen zweier Ebenen bedeuten, so ist die Gleichung:

$$AB = o,$$

welche ausdrückt, dass der variable Punkt (x, y, z) entweder in der einen oder in der anderen Ebene liegt, nach der Definition die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Ebenen schneiden eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ in zwei ebenen Curven, und jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die beiden ebenen Curven hindurchgeht, stellt sich unter der Form dar:

$$f - \lambda AB = o,$$

so dass, wenn $\varphi = o$ die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, welche durch die beiden ebenen Curven hindurchgeht, man Werthe von λ und μ wird bestimmen können, dass man identisch hat:

$$f - \lambda AB \equiv \mu \varphi.$$

Wenn dagegen nur f und A gegeben sind, so führt die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $f - \lambda AB = o$ vier in λB

steckende willkürliche Constanten mit sich. Diese Gleichung stellt eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche durch die Schnittcurve der Ebene $A = o$ und der Oberfläche $f = o$ hindurchgeht. Dass diese Gleichung mit den vier willkürlichen Constanten aber alle Oberflächen zweiter Ordnung darstellt, welche durch die genannte ebene Schnittcurve hindurchgehen, kann man sich unter der Voraussetzung des Satzes „dass die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung durch fünf Punkte derselben unzweideutig bestimmt ist“, etwa auf folgende Art verdeutlichen. Die Schnittcurve von $A = o$ und $f = o$ ist aequivalent mit 5 Punkten auf ihr. Soll daher eine Oberfläche zweiter Ordnung $\varphi = o$ durch diese Schnittcurve hindurchgehen, so hat die Gleichung derselben 5 linearen Bedingungen zu genügen. Sie muss also noch 4 willkürliche Constanten enthalten, welchen man solche Werthe geben kann, dass die Oberfläche noch durch 4 andere gegebene Punkte des Raumes hindurchgeht. Dieser Bedingung genügt aber die angegebene Gleichung $f - \lambda AB = o$.

Wenn daher umgekehrt $f = o$ und $\varphi = o$ die Gleichungen von irgend zwei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung sind, die sich in einer ebenen Curve schneiden, welche in der Ebene $A = o$ liegt, so wird man die vier Constanten in λB und einen Factor μ immer so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$f - \mu\varphi \equiv \lambda AB.$$

Es beweiset dieses den Satz:

Wenn zwei Oberflächen zweiter Ordnung sich in einer ebenen Curve schneiden, so schneiden sie sich zugleich noch in einer zweiten ebenen Curve.

Wir werden in einer späteren Vorlesung über die Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung Gelegenheit haben von diesem Satze Gebrauch zu machen, nachdem wir jedoch vorher die oben angegebene Voraussetzung werden bewiesen haben.

Sind nur 7 Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung gegeben, so haben die 9 Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche auch nur 7 linearen Bedingungsgleichungen zu genügen. Betrachtet man daher in diesen Bedingungsgleichungen 7 Coefficienten als die Unbekannten, und drückt sie, indem man die Gleichungen auflöset, durch die beiden anderen $\varkappa$ und λ aus,

die willkürlich bleiben, so erhält man Ausdrücke von der Form $\alpha + \beta\varkappa + \gamma\lambda$, und die Gleichung der Oberfläche selbst nimmt, wenn man diese Ausdrücke substituirt, die Gestalt an:

$$\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi = o.$$

Diese Gleichung mit den beiden willkürlichen Constanten $\varkappa$ und λ ist der analytische Ausdruck eines ganzen Systemes Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen 7 Punkte hindurchgehen. Sie ist zusammengesetzt aus den Gleichungen:

$$\varphi = o, \qquad \psi = o, \qquad \chi = o$$

von drei Oberflächen zweiter Ordnung, welche sich in den genannten 7 Punkten schneiden, und stellt, weil sie zwei willkürliche Constanten mit sich führt, und weil sie erfüllt wird für alle Werthe der Coordinaten, welche den drei letzten Gleichungen der drei Oberflächen zweiter Ordnung zugleich genügen, alle Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche hindurchgehen durch sämmtliche Schnittpunkte der drei Oberflächen. Setzt man nun voraus, dass drei Oberflächen zweiter Ordnung sich in 8 Punkten schneiden, eine Voraussetzung, die wir gleich begründen werden, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte des Raumes gehen, gehen zugleich durch einen durch diese 7 Punkte bestimmten achten Punkt hindurch.

Hieraus entspringt nun die Aufgabe: wenn 7 Punkte des Raumes gegeben sind, den achten Punkt zu construiren, in welchem sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, die durch die 7 gegebenen Punkte hindurchgehen. Eine lineare Construction findet man in Crelle's Journal für Mathematik Bd. 20, p. 304—308.

Wenn nach dem Vorhergehenden die Raumcurve, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, gegeben ist durch 8 Punkte in ihr, so ist es nach dem zuletzt angegebenen Satze einleuchtend, dass zu ihrer Bestimmung nicht solche 8 Punkte gewählt werden dürfen, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden.

Die Frage nach der Zahl der Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\varphi(x, y, z) = o, \quad \psi(x, y, z) = o, \quad \chi(x, y, z) = o,$$

welche sich nicht in ein und derselben Curve schneiden, ist ein rein algebraisches Problem, welches dadurch seine Lösung findet, dass man feststellt, wie viele Systeme Werthe der Variabeln den angegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, oder dass man den Grad der Endgleichung bestimmt, welche aus den drei Gleichungen durch Elimination von zwei Variabeln hervorgeht. Da aber der Grad der Endgleichung bei einem ungeschickten Eliminationsverfahren leicht durch einen überflüssigen Factor erhöht werden kann, so ist es zweckdienlich die Zahl der Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung in einem speciellen Falle festzustellen. Denn kennt man diese Zahl in einem speciellen Falle, und man findet den Grad der Endgleichung gleich jener Zahl, so kann man versichert sein, dass die Endgleichung keinen überflüssigen Factor enthält. Nun lehrt aber die geometrische Betrachtung, dass drei Ebenenpaare, als specieller Fall dreier Oberflächen zweiter Ordnung, sich in 8 Punkten schneiden. Wenn daher das im Allgemeinen einzuhaltende Eliminationsverfahren schliesslich auch eine Gleichung des achten Grades giebt, so wird man dadurch den Beweis geführt haben, dass überhaupt drei Oberflächen zweiter Ordnung sich in 8 Punkten schneiden.

Wenn man durch Einführung der homogenen Coordinaten statt der rechtwinkligen, indem man $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ setzt respective für x, y, z, in die gegebenen Gleichungen, und durch Multiplication mit p^2 dieselben auf die Form zurückführt:

$$\varphi(x, y, z, p) = o, \quad \psi(x, y, z, p) = o, \quad \chi(x, y, z, p) = o,$$

in welcher Form die linken Theile der Gleichungen homogene ganze Functionen des zweiten Grades der vier Coordinaten x, y, z, p bedeuten, so kommt das erwähnte algebraische Problem darauf zurück, durch Elimination von zwei Coordinaten aus den zuletzt angegebenen drei Gleichungen die in Rücksicht auf die beiden anderen Coordinaten homogene Endgleichung zu bestimmen.

Aber auch dieses Problem entbehrt noch der Symmetrie, deren Aufrechterhaltung in den analytischen Operationen sich von so grossem Nutzen erweiset. Deshalb erweitern wir das Problem, indem wir es also ausdrücken:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination von x, y, z, p aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = o, \quad \psi(x, y, z, p) = o, \quad \chi(x, y, z, p) = o,$$

$$R \equiv ux + vy + wz + rp = o.$$

Denn aus der in u, v, w, r homogenen Endgleichung wird, wenn man setzt: $u = v = o$, $w = p$, $r = -z$, wodurch R identisch verschwindet, die eine Lösung des vorhergehenden Problems erhalten, und in ähnlicher Weise die übrigen. Der Grad der in u, v, w, r homogenen Endgleichung wird folglich gleich der Zahl der Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiter Ordnung sein.

Aber auch das erweiterte algebraische Problem hat seine geometrische Bedeutung. Denn betrachten wir u, v, w, r als die variabeln Coordinaten einer Ebene, so stellt $R = o$ einen Punkt dar, und zwar, wenn wir unter x, y, z, p die aus den Gleichungen der drei Oberflächen $\varphi = o$, $\psi = o$, $\chi = o$ sich ergebenden Werthe dieser Coordinaten verstehen, den Schnittpunkt der drei Oberflächen. Schneiden sich die drei Oberflächen in mehr als einem Punkte, so wird die durch Elimination der Punktcoordinaten hervorgehende Endgleichung in Ebenencoordinaten das Product sämmtlicher Schnittpunktgleichungen darstellen, und sich daher in lineare Factoren auflösen lassen müssen.

Wir wenden uns nun zu der Lösung des Problems. Nach demselben hat man vier ganze homogene Functionen der Variabeln x, y, z, p, welche für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden:

$$\varphi, \quad \psi, \quad \chi, \quad R.$$

Die Determinante Δ dieser vier Functionen ist eine homogene Function des dritten Grades in Rücksicht auf die Variabeln und eine homogene Function des ersten Grades in Rücksicht auf die Ebenencoordinaten u, v, w, r. Da die drei ersten Functionen von gleichem Grade sind, so kommt

der Satz (14) der vorhergehenden Vorlesung in Anwendung, nach welchem man hat:

$$\frac{d\Delta}{dx} + \lambda u = o, \quad \frac{d\Delta}{dy} + \lambda v = o,$$

$$\frac{d\Delta}{dz} + \lambda w = o, \quad \frac{d\Delta}{dp} + \lambda r = o.$$

Neben diesen vier Gleichungen hat man noch folgende sieben:

$$\varphi = o, \quad \psi = o, \quad \chi = o,$$

$$xR = o, \quad yR = o, \quad zR = o, \quad pR = o.$$

Dieses sind im Ganzen 11 lineare und homogene Gleichungen zwischen den 11 Unbekannten:

$$x^2, \ y^2, \ z^2, \ p^2, \ xy, \ xz, \ xp, \ yz, \ yp, \ zp, \ \lambda.$$

Betrachtet man diese 11 Unbekannten als Variable, so hat man 11 lineare homogene Functionen, welche für ein System Werthe der Variabeln verschwinden, nämlich die linken Theile jener 11 Gleichungen. Die Determinante Ω dieser 11 linearen Functionen verschwindet nach Satz (8) der vorhergehenden Vorlesung. Man hat daher als Resultat der Elimination:

$$\Omega = o.$$

Dass diese Gleichung homogen und vom achten Grade ist rücksichtlich der Ebenencoordinaten, sieht man sogleich, wenn man die Determinante Ω in der gebräuchlichen Form hinschreibt mit Angabe der Grade der Componenten. Dadurch ist zugleich im Allgemeinen der Satz bewiesen:

Drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich in 8 Punkten.

Wenn eine von den drei Oberflächen in ein Ebenenpaar übergeht, so werden jede von diesen Ebenen und die beiden anderen Oberflächen sich nur in vier Punkten schneiden können, was wir so ausdrücken:

Zwei Oberflächen zweiter Ordnung und eine Ebene schneiden sich in 4 Punkten.

Dieser Satz wird durch die Auflösung der folgenden Aufgabe auch direct bewiesen:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination von x, y, z, p aus den Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = o, \quad \psi(x, y, z, p) = o,$$

$$A \equiv ax + by + cz + dp = o, \quad R = ux + vy + wz + rp = o.$$

Man hat hier wieder vier homogene Functionen φ, ψ, A, R, die beiden ersten vom zweiten, die anderen beiden vom ersten Grade, welche für ein System Werthe der Variabeln x, y, z, p verschwinden. Die Determinante Δ dieser Functionen ist homogen und von dem zweiten Grade. Da nun die beiden ersten Functionen von gleichem Grade sind, so hat man nach Satz (15) der vorhergehenden Vorlesung:

$$\frac{d\Delta}{dx} + \lambda u + \mu a = o, \quad \frac{d\Delta}{dy} + \lambda v + \mu b = o,$$

$$\frac{d\Delta}{dz} + \lambda w + \mu c = o, \quad \frac{d\Delta}{dp} + \lambda r + \mu d = o,$$

und wenn man noch die Gleichungen hinzufügt:

$$A = o, \quad R = o,$$

so hat man 6 in Rücksicht auf die 6 Unbekannten:

$$x, y, z, p, \lambda, \mu$$

lineare homogene Gleichungen. Das Resultat der Elimination dieser Unbekannten aus den 6 Gleichungen wird:

$$\Omega = o,$$

eine in den Ebenencoordinaten u, v, w, r homogene Gleichung des vierten Grades. Der hierdurch bewiesene Satz lässt sich auch so ausdrücken:

Die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung wird durch eine Ebene in 4 Punkten geschnitten.

Wird von den beiden Oberflächen zweiter Ordnung die eine ein Ebenenpaar, so ergiebt sich der Satz:

Eine Oberfläche zweiter Ordnung wird durch eine gerade Linie in 2 Punkten geschnitten,

der durch die Auflösung folgender Aufgabe auch direct bewiesen wird:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche aus der Elimination von x, y, z, p aus den Gleichungen hervorgeht:

$$\varphi(x, y, z, p) = o, \qquad A \equiv ax + by + cz + dp = o,$$
$$B \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta p = o, \quad R \equiv ux + vy + wz + rp = o.$$

Es verschwindet nach Satz (8) der vorhergehenden Vorlesung die in x, y, z, p lineare homogene Determinante $\varDelta$ der Functionen φ, A, B, R, welche in Rücksicht auf u, v, w, r linear und homogen ist, für das System Werthe der Variabeln, welches den angegebenen vier Gleichungen genügt. Daher hat man die vier linearen Gleichungen:

$$\varDelta = o, \quad A = o, \quad B = o, \quad R = o,$$

aus welchen durch Elimination der Variabeln die in u, v, w, r homogene Gleichung:

$$\mathfrak{R} = o$$

des zweiten Grades hervorgeht, welche analytisch das Schnittpunktenpaar der Oberfläche zweiter Ordnung $\varphi = o$ und der beiden Ebenen $A = o$, $B = o$ darstellt.

Zehnte Vorlesung.

Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wir gehen von der durch Einführung der homogenen Coordinaten x, y, z, p statt der rechtwinkligen Coordinaten homogen gemachten Gleichung zweiten Grades:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, p) = o$$

als dem analytischen Ausdruck für die Oberflächen zweiter Ordnung aus. Wir bringen dieselbe in Verbindung mit den Gleichungen einer geraden Linie, die durch irgend zwei Punkte 0 und 1 in ihr, deren Coordinaten wir mit den angehängten In-

dices 0, 1 bezeichnen, bestimmt ist, nämlich nach (1) der sechsten Vorlesung:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda x_1, \\ y &= y_0 + \lambda y_1, \\ z &= z_0 + \lambda z_1, \\ p &= p_0 + \lambda p_1. \end{aligned}$$

Diese Coordinaten x, y, z, p, wenn sie der Gleichung der Oberfläche (1) genügen, sind die Coordinaten des Schnittpunktes der Oberfläche und der geraden Linie. Man hat daher zur Bestimmung von λ für den Schnittpunkt die Gleichung:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad f(x_0 + \lambda x_1,\ y_0 + \lambda y_1,\ z_0 + \lambda z_1,\ p_0 + \lambda p_1) = 0.$$

Da diese Gleichung aber in λ eine quadratische ist, so erkennt man darin einen zweiten Beweis, dass die gerade Linie die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneidet. Die Coordinaten x, y, z, p des einen oder des anderen Schnittpunktes erhält man aus (2), indem man die eine oder die andere Wurzel für λ setzt. Da die quadratische Gleichung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln hat, so wird dem gemäss die gerade Linie die Oberfläche zweiter Ordnung entweder in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneiden. Das Verhältniss der beiden Wurzeln ist das anharmonische des Schnittpunktenpaares zu dem gegebenen Punktenpaar. Die Bedingung, dass das Schnittpunktenpaar harmonisch sei zu dem gegebenen, ist daher das Verschwinden der Summe der beiden Wurzeln.

Um diese Bedingung auszudrücken, entwickeln wir die Gleichung (3) mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes nach Potenzen von λ, wodurch die Gleichung die Gestalt erhält:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad f_{00} + 2\lambda f_{01} + \lambda^2 f_{11} = 0,$$

wenn.

$$2f_{00} = 2f(x_0, y_0, z_0, p_0) = x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0) + p_0 f'(p_0),$$

$$2f_{11} = 2f(x_1, y_1, z_1, p_1) = x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1) + p_1 f'(p_1),$$

$$2f_{01} = x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0).$$

Die Summe der beiden Wurzeln verschwindet allein unter der Bedingung:

$$(5) \ldots\ldots x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) = o,$$

welche sich auch so ausdrücken lässt:

$$(6) \ldots\ldots x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1) = o,$$

denn der linke Theil dieser Gleichung bleibt bei der Vertauschung der Indices 0 und 1 mit einander ungeändert, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man für die Zeichen der Differentialquotienten ihre wirklichen Ausdrücke setzt.

Diese Gleichung ist also die Bedingung zwischen den Coordinaten zweier Punkte 0 und 1, die stattfinden muss, wenn die Verbindungslinie derselben die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneiden soll, die harmonisch sind zu den Punkten 0 und 1.

Man nennt zwei Punkte harmonische Pole der Oberfläche zweiter Ordnung, wenn ihre Verbindungslinie die Oberfläche in zwei Punkten schneidet, die harmonisch sind zu den beiden Punkten. Die Gleichung (5) oder (6) ist demnach die einzige Bedingungsgleichung für ein harmonisches Polenpaar 0 und 1 der Oberfläche (1). Diese Bedingungsgleichung ist linear und homogen in Rücksicht auf die Coordinaten jedes der beiden Pole. Deshalb wird der geometrische Ort des einem gegebenen Punkte 0 zugeordneten harmonischen Poles (x, y, z, p) eine Ebene sein:

$$(7) \ldots\ldots x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0) = o.$$

Diese Ebene nennt man die Polarebene des gegebenen Punktes, oder seine Polare und den gegebenen Punkt den Pol der Ebene. Die Polarebene eines gegebenen Punktes ist demnach der geometrische Ort des dem gegebenen Punkte zugeordneten Poles, oder, anders ausgedrückt, der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes auf den durch den gegebenen Punkt gehenden Strahlen.

Bezeichnet man die homogenen Coordinaten der Polarebene des Punktes 0 mit u_0, v_0, w_0, r_0, so hat man folgende lineare Relationen zwischen den Coordinaten des Poles und den Coordinaten seiner Polarebene:

$$(8) \ldots\ldots \tfrac{1}{2} f'(x_0) = u_0, \quad \tfrac{1}{2} f'(y_0) = v_0, \quad \tfrac{1}{2} f'(z_0) = w_0, \quad \tfrac{1}{2} f'(p_0) = r_0,$$

wodurch die Coordinaten der Polarebene ausgedrückt sind durch die Coordinaten des Poles, und umgekehrt die Coordinaten des Poles sich berechnen lassen, wenn die Coordinaten der Polarebene gegeben sind. Da im letzteren Falle die Coordinaten der Polarebene beliebige Werthe erhalten können, so sieht man, dass jede beliebige Ebene die Polarebene eines durch die Ebene bestimmten Punktes ist, gleich wie jeder Punkt des Raumes seine Polarebene hat.

Wenn man auf der Polarebene (7) des Punktes 0 einen beliebig gewählten Punkt 1 fixirt, so hat man nach dem Vorhergehenden die Relation (6). Die Gleichung der Polarebene des Punktes 1:

$$xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) + pf'(p_1) = 0$$

wird hiernach erfüllt, wenn man für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Punktes 0 setzt, das heisst, die Polarebene des Punktes 1 geht durch den Punkt 0. Man erkennt hierin den Beweis des Satzes:

Wenn ein Punkt eine Ebene durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt, den Pol der Ebene.

Hieraus folgt sogleich ein zweiter Satz:

Wenn ein Punkt eine gerade Linie durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um eine zweite gerade Linie, die in der Polarebene liegt.

Diese beiden geraden Linien entsprechen einander in der Weise, dass die Polarebenen der Punkte auf der einen geraden Linie sich in der zweiten geraden Linie schneiden. Ein solches Linienpaar nennt man reciproke Polaren der Oberfläche zweiter Ordnung und man erkennt leicht, dass jede beliebige gerade Linie im Raume ihre reciproke Polare hat.

Es sind hierdurch zugleich die Mittel geboten mit Leichtigkeit die umgekehrten Sätze zu beweisen, nämlich folgende:

Wenn eine Ebene sich um einen gegebenen Punkt dreht, so beschreibt der Pol der Ebene die Polarebene des gegebenen Punktes.

Wenn eine Ebene sich um eine gerade Linie in ihr dreht, so beschreibt der Pol der Ebene die reciproke Polare der geraden Linie.

Der Pol o liegt von seiner Polarebene bald weiter entfernt, bald näher, je nach seiner Lage zu der Oberfläche. Er kann selbst in seine Polarebene hineinfallen. Die Bedingung, dass er in seine Polarebene falle, wird aus (7) erhalten, wenn man für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Poles setzt, wodurch man erhält $f(x_0, y_0, z_0, p_0) = o$. Das heisst, wenn der Pol ein Punkt der Oberfläche zweiter Ordnung wird, so liegt er in seiner Polarebene. In diesem Falle hat auch die Polarebene eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Denn wählt man auf der Polarebene des in die Oberfläche fallenden Poles o beliebig einen Punkt p, so sind o und p harmonische Pole der Oberfläche. Die gerade Linie op schneidet also die Oberfläche in einem Punktenpaar, welches harmonisch ist zu dem Punktenpaar o, p. Von diesem Schnittpunktenpaar fällt aber ein Punkt mit dem Punkte o zusammen. Es muss daher der andere ebenfalls mit ihm zusammen fallen. Das heisst die gerade Linie op schneidet die Oberfläche in zwei mit o zusammenfallenden Punkten. Eine solche gerade Linie nennt man Tangente der Oberfläche im Punkte o. Die Polarebene von o ist demnach der geometrische Ort der Tangenten der Oberfläche in dem Punkte o.

Der geometrische Ort der Tangenten in einem Punkte o der Oberfläche zweiter Ordnung ist hiernach eine Ebene, die **Tangentenebene** der Oberfläche in diesem Punkte. Wir drücken diese Bemerkungen kurz so aus:

Wenn der Pol ein Punkt der Oberfläche zweiter Ordnung wird, so wird seine Polarebene die Tangentenebene der Oberfläche in diesem Punkte, und umgekehrt, der Pol der Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung ist der Berührungspunkt.

Die Gleichung (7) ist demnach die Gleichung der Tangentenebene in dem Punkte (x_0, y_0, z_0, p_0), wenn dieser Punkt in der Oberfläche zweiter Ordnung selbst liegt.

Schneidet man die Oberfläche zweiter Ordnung durch eine Ebene e, deren Pol p sei, und nimmt auf der Schnittcurve beliebig einen Punkt o an, so geht die Tangentenebene der Oberfläche im Punkte o, weil sie Polarebene dieses Punktes ist, durch p, und die gerade Linie op ist Tangente der Oberfläche. Man hat daher den Satz:

Wenn man den Pol einer Ebene durch eine gerade Linie verbindet mit irgend einem Punkte der Schnittcurve der Ebene und der Oberfläche zweiter Ordnung, so ist diese gerade Linie Tangente der Oberfläche in dem letzteren Punkte.

Man erhält daher die Tangenten, die von einem gegebenen Punkte an eine Oberfläche zweiter Ordnung gelegt werden können, wenn man jeden Punkt der Schnittcurve der Polarebene durch eine gerade Linie verbindet mit dem gegebenen Punkte. Der geometrische Ort dieser Tangenten ist der **Tangentenkegel** der Oberfläche. Der Tangentenkegel berührt also eine Oberfläche zweiter Ordnung in derjenigen Curve, in welcher die Polarebene der Spitze die Oberfläche schneidet.

Wir wiederholen die Relationen (8) zwischen den Coordinaten x, y, z, p des Poles und den Coordinaten u, v, w, r der Polarebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z, p) = o$:

$$(9) \; \ldots\ldots \; \tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Um die Coordinaten x, y, z, p des Poles auszudrücken, wenn die Coordinaten u, v, w, r der Polarebene gegeben sind, hat man diese linearen Gleichungen aufzulösen. Die Auflösung ergiebt für die Coordinaten des Poles Ausdrücke von der Form: $au + bv + cw + dr$. Setzt man diese Ausdrücke für x, y, z, p in die homogene Function zweiter Ordnung $f(x, y, z, p)$, so erhält man eine homogene Function $F(u, v, w, r)$ ebenfalls der zweiten Ordnung, welche wir die **reciproke Function** der Function $f(x, y, z, p)$ nennen, und welche durch Substitution der Ausdrücke (9) wieder in die Function $f(x, y, z, p)$ übergeht.

Man hat daher unter Vermittelung der Substitutionen (9) die Gleichung:

$$(10) \; \ldots\ldots\ldots \; F(u, v, w, r) = f(x, y, z, p).$$

Da aber: $f(x, y, z, p) = x\tfrac{1}{2}f'(x) + y\tfrac{1}{2}f'(y) + z\tfrac{1}{2}f'(z) + p\tfrac{1}{2}f'(p)$, so hat man ferner:

$$(11) \; \ldots\ldots \; F(u, v, w, r) = xu + yv + zw + pr.$$

Diese beiden Gleichungen (10) und (11) sind identische, wenn man sich die Werthe von u, v, w, r aus (9), oder, wenn man sich die Werthe von x, y, z, p, wie sie sich durch Auflösung der Gleichungen (9) ergeben, substituirt denkt.

Differenzirt man unter der letzteren Annahme die Gleichungen (10) und (11) partiell nach u, so erhält man:

$$F'(u) = \frac{dx}{du}f'(x) + \frac{dy}{du}f'(y) + \frac{dz}{du}f'(z) + \frac{dp}{du}f'(p)$$

$$= 2\left\{\frac{dx}{du}u + \frac{dy}{du}v + \frac{dz}{du}w + \frac{dp}{du}r\right\},$$

$$F'(u) = x + \frac{dx}{du}u + \frac{dy}{du}v + \frac{dz}{du}w + \frac{dp}{du}r.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch 2 und zieht sie von der letzten ab, so wird:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x.$$

Auf diese Weise erhält man durch Differentiation der Gleichungen (10) und (11) nach u, v, w, r respective die Gleichungen:

$$(12) \ldots . \quad \tfrac{1}{2}F'(u) = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(v) = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) = z, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) = p,$$

welche nichts anderes sind als die Auflösungen der linearen Gleichungen (9). Es verdient bemerkt zu werden, dass sie von derselben Form sind, als die aufzulösenden Gleichungen.

Um die der Function f reciproke Function F zu bilden, hat man die Werthe von x, y, z, p der aufgelösten Gleichungen (12) in f einzusetzen, wodurch man erhält:

$$F(u, v, w, r) = f\left(\tfrac{1}{2}F'(u), \ \tfrac{1}{2}F'(v), \ \tfrac{1}{2}F'(w), \ \tfrac{1}{2}F'(r)\right).$$

Aber einfacher und zugleich auf einem eleganteren Wege gelangt man zum Ziele durch die identische Gleichung:

$$F(u, v, w, r) = u \cdot \tfrac{1}{2}F'(u) + v \cdot \tfrac{1}{2}F'(v) + w \cdot \tfrac{1}{2}F'(w) + r \cdot \tfrac{1}{2}F'(r),$$

denn die Ausdrücke $\frac{1}{2}F'(u) \ldots$, aus welchen der rechte Theil der Gleichung zusammengesetzt ist, sind durch die Auflösungen (12) der Gleichungen (9) unmittelbar gegeben.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die der Function F reciproke Function wieder die ursprüngliche f ist. Diese beiden Functionen, die nach (10) unter Vermittelung der Substitutionen (9) oder (12) identische werden, stehen hiernach in solcher Beziehung, dass durch die eine auch die andere gegeben ist.

In der Gleichung (10) bedeuteten x, y, z, p die Coordinaten des Poles, u, v, w, r die Coordinaten der dem Pol zugeordneten Polarebene. Wenn der Pol die Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$

durchläuft, so berührt die Polarebene dieselbe Oberfläche und ist Tangentenebene der Oberfläche in dem Pol. Für diesen Fall hat man aber nach (10):

$$F(u, v, w, r) = f(x, y, z, p) = o,$$

das heisst, wenn eine Ebene Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ ist, so genügen die Coordinaten dieser Ebene der Gleichung zweiten Grades $F(u, v, w, r) = o$, und umgekehrt, wenn die Coordinaten einer Ebene dieser Gleichung genügen, so ist die Ebene eine Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$.

Denkt man sich die Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ durch ihre sämmtlichen Tangentenebenen erzeugt in gleicher Weise wie bisher durch Punkte in ihr, so wird man nach der Analogie die Gleichung:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) = o$$

die **Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten** nennen zum Unterschiede von der in Punktcoordinaten gegebenen Gleichung $f(x, y, z, p) = o$ derselben Oberfläche. Man versteht also unter der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten die Gleichung zweiten Grades, welche die Coordinaten einer Ebene zu erfüllen haben, wenn die Ebene Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung sein soll. Wie sie aus der gegebenen Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten, oder wie aus ihr wiederum die Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten hervorgeht, ist nach dem Vorhergehenden klar.

Um zu einer neuen Form der Function f zu gelangen, stellen wir unter Beifügung eines Factors $t = -1$ die Gleichungen zusammen, welche vorhin dazu dienten die Function f als eine Function der Ebenencoordinaten wiederzugeben:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'(x) + u \,.\, t &= o, \\ \tfrac{1}{2}f'(y) + v \,.\, t &= o, \\ \tfrac{1}{2}f'(z) + w \,.\, t &= o, \\ \tfrac{1}{2}f'(p) + r \,.\, t &= o, \end{aligned}$$

$$ux + vy + wz + rp + f \,.\, t = o.$$

Die linken Theile dieser 5 Gleichungen kann man als lineare homogene Functionen der 5 Variabeln x, y, z, p, t betrachten, die für ein System Werthe dieser Variabeln verschwinden. Die Determinante Δ dieser 5 Functionen verschwindet nach (8) der achten Vorlesung für diese Werthe. Man hat daher eine Gleichung $\Delta = o$ zwischen f und den Ebenencoordinaten, woraus sich f als eine Function der Ebenencoordinaten ergiebt.

Zur wirklichen Darstellung der Function f in der angedeuteten Weise bedarf es der Kenntniss der Function f selbst. Nehmen wir daher an, dass:

$$(15) \quad \ldots f = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + a_{33}p^2 \\ + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{03}xp \\ + 2a_{12}yz + 2a_{13}yp + 2a_{23}zp,$$

so wird, indem wir der Bequemlichkeit wegen setzen $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(z) = a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p,$$
$$\tfrac{1}{2}f'(p) = a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p.$$

Setzt man diese Werthe aber in (14), so erhält man die gesuchte Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{12}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{20}, & a_{31}, & a_{22}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & f + o \end{vmatrix},$$

und aus der Gleichung $\Delta = o$ mit Rücksicht auf (16) der siebenten Vorlesung wird:

$$(16) \quad \ldots\ldots \Delta . f + \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{02}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{22}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{32}, & r \\ u, & v, & w, & r, & o \end{vmatrix} = o,$$

indem man hat:

$$(17) \quad \ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

Da aber die durch Ebenencoordinaten ausgedrückte Function f nach (10) die Function F ist, so hat man eine zweite Darstellung der Function F in Determinantenform:

$$(18) \quad \ldots \quad F(u, v, w, r) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & o \end{vmatrix}.$$

Elfte Vorlesung.

Weitere allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Von der Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung in Punktcoordinaten am Anfange der neunten Vorlesung ausgehend, gelangten wir mit Hülfe von Pol und Polarebene am Schlusse der letzten Vorlesung zu einer neuen analytischen Ausdrucksweise der Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten:

$$F(u, v, w, r) = o,$$

der Bedingungsgleichung zweiten Grades, welche erfüllt wird, wenn die Ebene (u, v, w, r) Tangentenebene der Oberfläche zweiter Ordnung ist. Eine gleiche Behandlungsweise dieser Gleichung, wie in der neunten Vorlesung der Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten, wird zu analogen Sätzen führen.

Die angegebene Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist aus 10 Gliedern zusammengesetzt, von welchen jedes Glied seinen Coefficienten hat. Da jedoch durch Division der Gleichung durch einen Coefficienten dieser Coefficient auf die Einheit zurückkommt, so kann man, ohne die Gleichung

zu beschränken, annehmen, dass ein Coefficient gleich 1 sei, dass also die Gleichung nur 9 Coefficienten enthalte, welche in linearer Weise in die Gleichung eingehen, und deren Werthe die Natur der Oberfläche zweiter Ordnung bedingen.

Soll die Oberfläche zweiter Ordnung eine durch ihre Coordinaten gegebene Ebene berühren, so müssen diese 9 Coefficienten der linearen Bedingungsgleichung genügen, die man erhält, wenn man in der Gleichung der Oberfläche für die Variabeln setzt die gegebenen Coordinaten der Ebene. Neun solcher Bedingungsgleichungen bestimmen die 9 Coefficienten unzweideutig. Daher hat man den Satz:

Durch 9 beliebig gewählte Tangentenebenen ist eine Oberfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen unzweideutig bestimmt.

Acht Tangentenebenen der Oberfläche zweiter Ordnung, welche 8 linearen Bedingungsgleichungen zwischen den 9 Coefficienten entsprechen, bestimmen deshalb die Oberfläche nicht vollständig. Vielmehr lassen sich 8 Coefficienten durch den neunten λ, der willkürlich bleibt, ausdrücken, und diese Ausdrücke eingesetzt in die obige Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, geben die allgemeine Form der Gleichung aller Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\Phi(u, v, w, r) - \lambda\, \Psi(u, v, w, r) = o,$$

welche 8 gegebene Ebenen berühren.

Daraus erhält man, indem man $\lambda = o$ oder $= \infty$ setzt, die Gleichungen:

$$\Phi(u, v, w, r) = o, \quad \Psi(u, v, w, r) = o$$

zweier bestimmten Oberflächen zweiter Ordnung, welche die 8 gegebenen Ebenen berühren. Diese beiden Oberflächen haben unendlich viele gemeinschaftliche Tangentenebenen, welche den Ebenencoordinaten entsprechen, die beiden Gleichungen zugleich genügen. Da aber die Ebenencoordinaten, welche den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, auch der vorhergehenden allgemeinen Gleichung genügen, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren, werden von allen Ebenen

berührt, welche gemeinschaftliche Tangentenebenen sind zweier dieser Oberflächen.

Soll daher eine Oberfläche zweiter Ordnung durch 9 Tangentenebenen bestimmt sein, so dürfen diese nicht zwei Oberflächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Ein specieller Fall einer Oberfläche zweiter Ordnung ist ein Punktenpaar, oder, will man sich eine andere Vorstellung davon machen, eine in eine gerade Linie ausgeartete Oberfläche, welche durch die beiden Punkte begrenzt ist. Denn wenn:

$$A = o, \quad B = o$$

die Gleichungen zweier Punkte bedeuten, so stellt:

$$AB = o$$

als eine Gleichung zweiten Grades eine Oberfläche zweiter Ordnung dar.

Ist nun $F = o$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenenroordinaten, so hat man den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die Oberflächen zweiter Ordnung, welche von allen Tangentenebenen der gegebenen Oberfläche berührt werden, die entweder durch den einen oder den anderen Punkt hindurchgehen:

$$F - \lambda AB = o.$$

Mit anderen Worten lässt sich dasselbe also wiedergeben. Die angegebene Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ stellt alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche die beiden von den Punkten $A = o$ und $B = o$ ausgehenden Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche $F = o$ ringsum berühren.

Ist daher $\Phi = o$ die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche jeden der genannten Tangentenkegel ringsum berührt, so wird man immer die Factoren λ und μ so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$F - \lambda AB \equiv \mu \Phi.$$

Nimmt man an, F und A seien gegeben, so stellt die Gleichung $F - \lambda AB = o$ mit den vier in λB steckenden willkürlichen Constanten eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche den vom Punkte $A = o$ ausgehenden Tangentenkegel der Ober-

fläche $F = o$ ringsum berührt. Um nachzuweisen, dass jene Gleichung mit den vier willkürlichen Constanten alle Oberflächen zweiter Ordnung umfasst, welche den erwähnten Tangentenkegel ringsum berühren, berufen wir uns auf einen Satz, der freilich erst später seine Erledigung finden wird „dass der Tangentenkegel einer Oberfläche zweiter Ordnung selbst eine Oberfläche zweiter Ordnung ist, welche durch 5 Tangentenebenen unzweideutig bestimmt ist." Hiernach ist der vom Punkte $A = o$ ausgehende Tangentenkegel der Oberfläche $F = o$ äquivalent mit 5 Tangentenebenen desselben. Deshalb sind zur Bestimmung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche den Tangentenkegel ringsum berührt, nur 5 Tangentenebenen derselben gegeben. Da aber eine Oberfläche zweiter Ordnung erst durch 9 Tangentenebenen vollständig bestimmt ist, so muss die fragliche Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung noch vier willkürliche Constanten mit sich führen. Dieses trifft aber in der That zu.

Wenn daher $F = o$ und $\Phi = o$ die Gleichungen zweier Oberflächen zweiter Ordnung sind, die den von dem Punkte $A = o$ ausgehenden Tangentenkegel gemeinsam haben, so wird man μ und die vier in λB steckenden Constanten immer so bestimmen können, das man identisch hat:

$$F - \mu \Phi \equiv \lambda A B.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

W e n n z w e i O b e r f l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g v o n d e m s e l b e n T a n g e n t e n k e g e l z w e i t e r O r d n u n g r i n g s u m b e r ü h r t w e r d e n, s o w e r d e n s i e g l e i c h z e i t i g v o n e i n e m z w e i t e n g e m e i n s c h a f t l i c h e n T a n g e n t e n k e g e l z w e i t e r O r d n u n g r i n g s u m b e r ü h r t.

Sind nur 7 Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung $F = o$ durch ihre Coordinaten gegeben, so hat man zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche auch nur 7 lineare Bedingungsgleichungen, mittels welcher sich 7 Coefficienten durch die beiden anderen λ und μ, die willkürlich bleiben, ausdrücken lassen. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $F = o$ der Oberfläche ein, so erhält man die allgemeinste Form der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 7 Ebenen berührt:

$$\Phi + \varkappa \Psi + \lambda X = o.$$

Da diese Gleichung aber zusammengesetzt ist aus den Gleichungen der drei Oberflächen zweiter Ordnung:

$$\Phi = o, \quad \Psi = o, \quad X = o,$$

so wird sie erfüllt für jedes System der Ebenencoordinaten, welches den drei Gleichungen zugleich genügt. Das heisst die gemeinsamen Tangentenebenen der drei Oberflächen sind zugleich Tangentenebenen der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 7 Ebenen berührt. Die drei Oberflächen zweiter Ordnung werden aber, wie wir sogleich nachweisen werden, von 8 Ebenen zugleich berührt. Da von diesen 8 Ebenen 7 die gegebenen sind, denn die angegebenen drei Oberflächen sind specielle Fälle der allgemeinen Oberfläche zweiter Ordnung, so hat man den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 gegebene Ebenen berühren, berühren überdies eine durch die 7 Ebenen bestimmte achte Ebene.

Wenn daher zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung 8 solche Ebenen gegeben sind, so vertreten sie nur die Stelle von 7 Ebenen.

Die Bestimmung der dreien Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen Tangentenebenen führt auf die rein algebraische Aufgabe:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = o, \quad \Psi = o, \quad X = o,$$
$$R = ux + vy + wz + rp = o.$$

Denn die Endgleichung wird das Product der Gleichungen sämmtlicher gemeinsamen Tangentenebenen sein in Punktcoordinaten ausgedrückt.

Diese Aufgabe sowie die folgenden, sind bereits in der neunten Vorlesung mit Vertauschung von Punkt- und Ebenencoordinaten gelöst worden. Wir entnehmen daraus, dass die homogene Endgleichung in Punktcoordinaten vom achten Grade ist, wodurch der Satz bewiesen wird:

Drei Oberflächen zweiter Ordnung haben 8 gemeinsame Tangentenebenen.

Ebenso führt die Bestimmung der gemeinsamen Tangentenebenen zweier Oberflächen zweiter Ordnung $\Phi = o$, $\Psi = o$, welche durch einen gegebenen Punkt $A = o$ hindurchgehen, auf die Aufgabe zurück:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = o, \quad \Psi = o, \quad A \equiv au + bv + cw + dr = o,$$

$$R \equiv ux + vy + wz + rp = o.$$

Die geometrische Interpretation der Endgleichung giebt den Satz:

Durch einen gegebenen Punkt des Raumes lassen sich vier Ebenen legen, welche zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Die Frage endlich nach den Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung $\Phi = o$, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte des Raumes $A = o$ und $B = o$ oder durch die Verbindungslinie derselben hindurchgehen, fällt mit der Aufgabe zusammen:

Die Endgleichung zu bestimmen, welche durch Elimination der Variabeln u, v, w, r aus den vier homogenen Gleichungen hervorgeht:

$$\Phi = o, \qquad A \equiv au + bv + cw + dr = o,$$

$$B \equiv \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = o, \quad R \equiv ux + vy + wz + rp = o.$$

Dass die Endgleichung in Rücksicht auf die Punktcoordinaten vom zweiten Grade ist, dient als Beweis des Satzes:

Durch eine gerade Linie lassen sich zwei Tangentenebenen an eine Oberfläche zweiter Ordnung legen.

Zwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der zehnten Vorlesung über Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. Reciprocität.

Wir haben am Ende der zehnten Vorlesung für die Oberflächen der zweiten Ordnung den analytischen Ausdruck derselben gefunden:

$$(1) \quad F(u, v, w, r) = o.$$

Wir stellen denselben zusammen mit den Coordinaten u, v, w, r irgend einer Ebene, welche durch die Schnittlinie l zweier gegebenen Ebenen 0 und 1 hindurchgeht, deren Coordinaten wir mit den angehängten Indices bezeichnen, indem wir die betreffenden Relationen aus (4) der sechsten Vorlesung entnehmen:

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= u_0 + \lambda u_1, \\ v &= v_0 + \lambda v_1, \\ w &= w_0 + \lambda w_1, \\ r &= r_0 + \lambda r_1. \end{aligned}$$

Wenn diese Coordinaten u, v, w, r der Gleichung (1) genügen, so entsprechen sie den Tangentenebenen der Oberfläche. Man hat daher zur Bestimmung der Tangentenebenen der Oberfläche, die durch die gerade Linie l gehen, die Gleichung:

$$(3) \quad F(u_0 + \lambda u_1,\ v_0 + \lambda v_1,\ w_0 + \lambda w_1,\ r_0 + \lambda r_1) = o.$$

Dass diese Gleichung eine in λ quadratische Gleichung ist, wird als ein neuer Beweis gelten des Satzes, den wir aus einer anderen Betrachtung bereits abgeleitet haben, dass durch eine gerade Linie sich an eine Oberfläche zweiter Ordnung zwei Tangentenebenen legen lassen.

Das anharmonische Verhältniss des erwähnten Tangentenebenenpaares zu dem gegebenen Ebenenpaar 0, 1 ist das Verhältniss der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung. Es wird dieses Verhältniss zu einem harmonischen unter der Be-

dingung, dass die Summe der beiden Wurzeln verschwindet. Entwickelt man, um diese Bedingung auszudrücken, die quadratische Gleichung (3) nach Potenzen von λ, und setzt in der Entwickelung den Coefficienten der ersten Potenz gleich 0, so erhält man:

$$(4) \; \ldots\ldots \; u_1 F'(u_0) + v_1 F'(v_0) + w_1 F'(w_0) + r_1 F'(r_0) = 0,$$

oder, da man auch die Indices 0 und 1 vertauschen kann, ohne den linken Theil der Gleichung zu ändern:

$$(5) \; \ldots\ldots \; u_0 F'(u_1) + v_0 F'(v_1) + w_0 F'(w_1) + r_0 F'(r_1) = 0$$

als Bedingung für das Ebenenpaar 0, 1, wenn dasselbe zu dem durch ihre Schnittlinie gelegten Tangentenebenenpaar der Oberfläche harmonisch sein soll.

Man nennt ein Ebenenpaar harmonische Polarebenen oder harmonische Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, wenn das durch die Schnittlinie derselben gelegte Tangentenebenenpaar der Oberfläche harmonisch ist zu dem Ebenenpaar. Es ist daher (4) oder (5) die einzige Bedingung, die die Coordinaten zweier Ebenen 0 und 1 zu erfüllen haben, wenn sie harmonische Polarebenen der Oberfläche zweiter Ordnung sein sollen.

Nimmt man an, die eine harmonische Polarebene 0 der Oberfläche sei gegeben, die andere habe die Coordinaten u, v, w, r, so hat man die einzige Bedingung:

$$(6) \; \ldots\ldots \; u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0) + r F'(r_0) = 0,$$

welche ausdrückt, dass sämmtliche harmonische Polarebenen einer gegebenen Ebene 0 durch ein und denselben Punkt gehen, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\tfrac{1}{2} F'(u_0) = x_0, \quad \tfrac{1}{2} F'(v_0) = y_0, \quad \tfrac{1}{2} F'(w_0) = z_0, \quad \tfrac{1}{2} F'(r_0) = p_0.$$

Diese Gleichungen sind aber nach (12) der zehnten Vorlesung die Relationen zwischen Pol und Polarebene. Man hat daher den Satz:

Die einer gegebenen Ebene zugeordneten harmonischen Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung gehen durch den Pol der gegebenen Ebene.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft eines harmonischen Polarebenenpaares, dass der Pol der einen Ebene in der anderen liegt. Denn die Gleichungen (4) und (5) gehen durch die bekannten Relationen (12) der zehnten Vorlesung zwischen Pol und Polarebene über in:

$$u_0 x_1 + v_0 y_1 + w_0 z_1 + r_0 p_1 = o,$$
$$u_1 x_0 + v_1 y_0 + w_1 z_0 + r_1 p_0 = o,$$

welche Gleichungen nach (9) der zehnten Vorlesung sich auch so darstellen lassen:

$$x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) = o,$$
$$x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1) = o,$$

woraus wir den geometrischen Satz entnehmen:

Die Pole zu einem Paare harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung sind harmonische Pole, und die Polarebenen eines harmonischen Polenpaares einer Oberfläche zweiter Ordnung sind harmonische Polarebenen.

Wenn man die bekannten Ausdrücke der Punktcoordinaten des Poles einer Oberfläche zweiter Ordnung nach (12) der zehnten Vorlesung in die Gleichung einer zweiten in Punktcoordinaten gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung einsetzt:

$$\varphi(x, y, z, p) = o,$$

so erhält man die Gleichung einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten:

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}F'(u), \ \tfrac{1}{2}F'(v), \ \tfrac{1}{2}F'(w), \ \tfrac{1}{2}F'(r)\right) = o.$$

Setzt man dagegen die Ausdrücke (9) der zehnten Vorlesung in die Gleichung einer zweiten in Ebenencoordinaten gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung:

$$\Phi(u, v, w, r) = o,$$

so erhält man die Gleichung einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten:

$$\Phi\left(\tfrac{1}{2}f'(x), \ \tfrac{1}{2}f'(y), \ \tfrac{1}{2}f'(z), \ \tfrac{1}{2}f'(p)\right) = o.$$

Diese Bemerkungen beweisen den Satz:

Wenn der Pol einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung eine zweite Oberfläche zweiter Ordnung beschreibt, so berührt seine Polarebene eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung, und umgekehrt, wenn die Polarebene einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sich als Tangentenebene um eine zweite Oberfläche zweiter Ordnung herumbewegt, so beschreibt der Pol eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung.

Die zweite und dritte Oberfläche fallen mit der gegebenen zusammen, wenn entweder der Pol die gegebene Oberfläche durchläuft, oder die Polarebene sich als Tangentenebene um die gegebene Oberfläche herumbewegt.

Wir fügen endlich noch einige Sätze hinzu, die sich nach den entwickelten Principien ebenso von selbst verstehen:

Das anharmonische Verhältniss von zwei Punktenpaaren auf einer geraden Linie ist gleich dem anharmonischen Verhältniss ihrer Polarebenen.

Das anharmonische Verhältniss von zwei Paar Ebenen, welche sich in derselben geraden Linie schneiden, ist gleich dem anharmonischen Verhältniss ihrer Pole.

Die Polarebenen von zwei harmonischen Punktenpaaren sind harmonische Ebenen.

Die Pole von zwei harmonischen Ebenenpaaren sind harmonische Punkte.

Die Polarebenen von drei Punktenpaaren der Involution bilden wieder eine Involution.

Die Pole von drei Ebenenpaaren der Involution bilden wieder eine Involution.

Es bleibt noch übrig auf das Verhalten von den Linienpaaren hinzuweisen, die wir in der zehnten Vorlesung reciproke Polaren der Oberfläche zweiter Ordnung genannt haben.

Aus der charakteristischen Eigenschaft eines solchen Linienpaares, dass die Polarebenen der Punkte auf der einen dieser Linien sich in der anderen schneiden, folgt unmittelbar der Satz:

Jede gerade Linie, welche ein Paar reciproke Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung schneidet, schneidet die Oberfläche in einem Punktenpaar, welches zu dem Schnittpunktenpaar auf den reciproken Polaren harmonisch ist.

Da sich die Polarebenen aller Punkte auf einer gegebenen Ebene in dem Pol dieser Ebene schneiden, so werden auch die Polarebenen der Punkte, welche auf zwei geraden Linien der gegebenen Ebene liegen, durch den Pol der Ebene gehen, woraus die Sätze gefolgert werden können:

Wenn sich zwei gerade Linien im Raume schneiden, so schneiden sich auch die reciproken Polaren der beiden geraden Linien in einem Punkte, welcher der Pol ist der Ebene, in der die beiden geraden Linien liegen, und umgekehrt ist der Schnittpunkt der beiden geraden Linien der Pol der Ebene, in welcher die reciproken Polaren liegen.

Beschreibt eine gerade Linie in irgend welcher Art eine Ebene, so dreht sich ihre reciproke Polare um den Pol der Ebene.

Dreht sich eine gerade Linie um einen Punkt in ihr, so beschreibt ihre reciproke Polare die Polarebene des Punktes.

Wenn eine gerade Linie in einer Ebene sich um einen Punkt in ihr dreht, so dreht sich ihre reciproke Polare um den Pol der Ebene in der Polarebene des Punktes.

Da die reciproke Polare einer gegebenen geraden Linie in der Polarebene eines beliebigen Punktes der gegebenen geraden Linie liegt, so sieht man, dass die reciproke Polare der Tangente der Oberfläche zweiter Ordnung in der Tangentenebene des Berührungspunktes liegen muss. Denn wählt man den Berührungspunkt der Tangente als den beliebigen Punkt, so ist seine Polarebene eben die Tangentenebene. Wählt man aber einen anderen Punkt der Tangentenebene auf der Tangente, so geht seine Polarebene bekanntlich durch den Berührungspunkt. Das heisst:

Die reciproke Polare der Tangente in einem Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung ist in diesem Punkte wieder Tangente der Oberfläche.

Aus der Combination dieses Satzes mit den vorhergehenden folgt ferner:

Wenn eine gerade Linie sich als Tangente einer ebenen Schnittcurve einer Oberfläche zweiter Ordnung fortbewegt, so beschreibt die reciproke Polare der geraden Linie den Tangentenkegel, der die Oberfläche in der ebenen Schnittcurve ringsum berührt, und umgekehrt, wenn eine gerade Linie einen Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung beschreibt, so bewegt sich die reciproke Polare der geraden Linie als Tangente um die Berührungscurve.

Bewegt sich eine gerade Linie als Tangente um eine zweite, von der zum Grunde gelegten Oberfläche zweiter Ordnung verschiedene, Oberfläche zweiter Ordnung, so bewegt sich die reciproke Polare der Tangente als Tangente um eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung, welche von den Polarebenen der Punkte auf der zweiten Oberfläche berührt wird.

Beschreibt nämlich der Pol die zweite Oberfläche zweiter Ordnung, so bewegt sich seine Polarebene als Tangentenebene um eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung. Die Tangente der zweiten Oberfläche ist die Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte auf der Oberfläche; ihre Polarebenen, die die dritte Oberfläche berühren, liegen ebenfalls unendlich nahe an einander und schneiden sich in der Tangente der letzteren Oberfläche. Diese Schnittlinie ist aber die reciproke Polare der erwähnten Tangente der zweiten Oberfläche.

Wir schliessen hiermit diese Betrachtungen. Die aus ihnen gewonnenen Sätze über Pol und Polare genügen, um ein Uebertragungs-Princip herzuleiten, welches den Namen des **Princips der Reciprocität** führt. Dieses Princip, welches die Sätze von der Lage der Figuren verdoppelt, soll in den äusseren Umrissen in dem Folgenden entwickelt werden.

Jede gegebene Figur im Raume, bestehend aus Punkten, geraden Linien, Curven, Ebenen, Oberflächen, kann man sich in doppelter Weise entstanden denken. Durch den Punkt oder durch die Ebene. Wählt man den Punkt als die Einheit der Erzeugung, so wird jede Figur der Inbegriff aller Punkte sein, welche in ihr liegen. — [Es bringt Vortheil die Curven im Raume als einen speciellen Fall der Oberflächen aufzufassen, nämlich derjenigen Oberflächen, welche ihre Tangenten, das sind gerade Linien, welche zwei unendlich nahe Punkte der Curve verbinden, beschreiben. Umgekehrt wird daher auch jede Oberfläche, welche durch gerade Linien erzeugt ist, die aufeinanderfolgend sich schneiden wie die Tangenten einer Curve, als eine Curve betrachtet werden können.] Wählt man dagegen die Ebene als die Einheit der Erzeugung der Figur, so stellt sich der Punkt dar als der Inbegriff aller Ebenen, welche durch den Punkt gehen, die gerade Linie wird der Inbegriff aller Ebenen sein, welche sich in ihr schneiden, die Curve wird der Inbegriff aller Ebenen sein, welche durch zwei unendlich nahe Punkte auf der Curve hindurchgehen, die Oberfläche endlich wird der Inbegriff aller ihrer Tangentenebenen sein, das heisst der Ebenen, welche irgend drei unendlich nahe Punkte der Oberfläche, die nicht in einer geraden Linie liegen, verbinden.

Legt man nun irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung zu Grunde, die den Namen der Directrix führt, und betrachtet jeden Punkt der gegebenen Figur im Raume als den Pol einer Ebene, und, in der zweiten Darstellung derselben Figur durch Ebenen, jede Ebene als die Polarebene eines Punktes in Beziehung auf die Directrix, so werden die Ebene und der Punkt eine neue, die zu der gegebenen reciproke Figur, in doppelter Erzeugungsart durch Ebene und Punkt begründen, die der gegebenen Figur in folgender Art entspricht. Jedem Punkte der gegebenen Figur entspricht eine Ebene der reciproken Figur, jeder Ebene der gegebenen Figur entspricht ein Punkt der reciproken, jeder geraden Linie der gegebenen Figur entspricht eine gerade Linie der reciproken, jeder Cuve der gegebenen Figur entspricht eine Curve der reciproken, endlich entspricht jeder Oberfläche der gegebenen Figur eine Oberfläche der reciproken Figur. Umgekehrt entspricht auch in derselben Weise jedem Punkte der reciproken Figur eine Ebene der gegebenen, jeder

geraden Linie der reciproken Figur entspricht eine gerade Linie der gegebenen, jeder Curve oder Oberfläche der reciproken Figur entspricht eine Curve oder Oberfläche der gegebenen Figur. Mit anderen Worten, die gegebene Figur ist reciprok zu ihrer reciproken Figur.

Hiernach bedingt jede Eigenschaft einer gegebenen Figur, welche sich auf die Lage ihrer Bestandtheile bezieht, eine entsprechende Eigenschaft der reciproken Figur. Mit anderen Worten, aus jedem Satze über die Lage von Figurentheilen zu einander folgt ein Satz über die Lage der Theile der reciproken Figur.

Die reciproke Figur ist durch die gegebene vollständig bestimmt. Allein die Willkürlichkeit der gegebenen Figur wird eine entsprechende Willkürlichkeit der reciproken Figur zur Folge haben, wodurch eben der durch die reciproke Figur bewiesene Satz einen gewissen Grad der Allgemeinheit erlangt. Wie weit sich diese Allgemeinheit erstreckt, erfährt man daraus, dass man von der allgemeinen reciproken Figur ausgehend die gegebene als die reciproke von ihr bildet. Befindet sich unter diesen Umständen letztere noch in den Grenzen der zulässigen Allgemeinheit, so wird dieses ein Beweis sein, dass das Maass der Allgemeinheit des reciproken Satzes nicht überschritten ist.

Wir wollen dieses Princip an einem einfachen Beispiele erläutern. Wir wählen zu diesem Zwecke aus der neunten Vorlesung den Satz: „Drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich in 8 Punkten".

Dreien Oberflächen zweiter Ordnung einer gegebenen Figur entsprechen drei Oberflächen zweiter Ordnung der reciproken Figur. Jedem Punkte auf einer der gegebenen Oberflächen entspricht eine Tangentenebene der reciproken Oberfläche. Einem Punkte, der zugleich auf den drei gegebenen Oberflächen liegt, entspricht hiernach eine Ebene, welche zugleich die drei reciproken Oberflächen berührt. Die Zahl der Schnittpunkte der gegebenen drei Oberflächen ist also gleich der Zahl der gemeinsamen Tangentenebenen der reciproken Oberfläche. Eine neunte gemeinsame Tangentenebene der reciproken Oberflächen würde auf einen neunten Schnittpunkt der gegebenen drei Oberflächen schliessen lassen. Denn auch umgekehrt entspricht jeder Tangentenebene einer reciproken Oberfläche ein Punkt auf der gege-

benen Oberfläche. Da aber irgend welchen drei Oberflächen zweiter Ordnung einer reciproken Figur immer drei Oberflächen zweiter Ordnung einer gegebenen Figur entsprechen, so hat man im Allgemeinen den Satz der elften Vorlesung: „An drei Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich 8 gemeinsame Tangentenebenen legen".

Weitere Beispiele zur Anwendung des Principes findet man in den vorhergehenden Vorlesungen in Menge vor. Denn alle diejenigen Sätze, welche aus der doppelten geometrischen Deutung derselben Gleichungen hervorgegangen sind, indem man die Variabeln einmal als Punktcoordinaten, das andere Mal als Ebenencoordinaten auffasste, sind reciproke Sätze.

Wir stellen im Folgenden reciproke Sätze neben einander, die sich nach den vorgetragenen Principien eben so leicht einzeln beweisen lassen als sie nach dem Princip der Reciprocität von einander abgeleitet werden können:

Wenn ein Punktenpaar ein harmonisches Polenpaar ist für zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so ist dasselbe auch ein harmonisches Polenpaar für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchgeht.

Wenn ein Ebenenpaar ein harmonisches Polarebenenpaar ist für zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so ist dasselbe auch ein harmonisches Polarebenenpaar für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche alle Ebenen berührt, die gemeinschaftliche Tangentenebenen der beiden Oberflächen sind.

Wenn man durch zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung eine gerade Linie legt, so kann man auf ihr ein Punktenpaar bestimmen, welches harmonisch ist zu jedem Schnittpunktenpaare der geraden Linie und der Oberflächen. Dieses Punktenpaar ist ein Paar harmonischer Pole für jede der beiden Oberflächen, also nach dem ersten Satze auch ein harmonisches Polenpaar für eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der gegebenen Oberflächen hindurchgeht. Erinnert man sich nun der Definition für drei Punk-

tenpaare der Involution, so folgt daraus der Satz und sein reciproker:

Jede gerade Linie schneidet drei Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen eine durch die Schnittcurve der beiden anderen hindurchgeht, in Punkten der Involution.	Wenn man durch eine gerade Linie Tangentenebenen legt an drei Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen eine alle gemeinsamen Tangentenebenen der beiden anderen berührt, so bilden diese Tangentenebenen eine Involution.
Die Polarebenen eines gegebenen Punktes in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 8 feste Punkte im Raume gehen, schneiden sich in ein und derselben geraden Linie.	Die Pole einer gegebenen Ebene in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 feste Ebenen berühren, liegen in einer geraden Linie.
Die Polarebenen eines gegebenen Punktes in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 feste Punkte im Raume gehen, schneiden sich in ein und demselben Punkte.	Die Pole einer gegebenen Ebene in einem System Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 feste Ebenen berühren, liegen in ein und derselben Ebene.

Dreizehnte Vorlesung.

Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen.

Der Pol einer Ebene, die in ihrer ganzen Ausdehnung in das Unendliche fällt, hat rücksichtlich seiner Oberfläche zweiter Ordnung eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Legt man nämlich eine Sehne der Oberfläche durch den Pol, so schneidet die Sehne die Oberfläche in einem Punktenpaar, welches harmonisch ist zu dem Pol und dem Schnittpunkte der Sehne mit der Polarebene. Dieser letztere Schnittpunkt liegt aber in dem Unendlichen. Mithin halbirt der Pol die Sehne, so wie jede andere Sehne der Oberfläche, welche durch ihn geht.

Man nennt **Mittelpunkt** einer Oberfläche zweiter Ordnung einen Punkt, der alle durch ihn gezogenen Sehnen der Oberfläche halbirt. Es ist also der Pol einer Ebene in dem Unendlichen der Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Da es nur einen Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung giebt, so kann dieses als eine zweite Definition des Mittelpunktes dienen. Denn gäbe es zwei Mittelpunkte, so würde die durch sie gelegte Sehne der Oberfläche in zwei verschiedenen Punkten halbirt. Auf Grund dieser zweiten Definition folgt aus den letzten Sätzen der vorhergehenden Vorlesung:

Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 feste Ebenen berühren, liegen auf einer geraden Linie.

Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 feste Ebenen berühren, liegen auf einer Ebene.

Die analytische Bestimmung des Mittelpunktes einer Oberfläche zweiter Ordnung kann in doppelter Art geschehen, indem man entweder von der Gleichung der Oberfläche in Punktcoor-

dinaten oder von der Gleichung derselben Oberfläche in Ebenencoordinaten ausgeht. Im ersteren Falle sei die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, p) = o.$$

Aus (9) der zehnten Vorlesung entnehmen wir die Relationen zwischen den Coordinaten des Poles (x, y, z, p) und seiner Polarebene (u, v, w, r):

$$(2) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Da die Polarebene aber in das Unendliche fällt, wenn $u = v = w = o$, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche die Gleichungen:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f'(x) = o, \quad f'(y) = o, \quad f'(z) = o.$$

Von diesen drei linearen Gleichungen hat auch jede ihre geometrische Bedeutung. Sie drücken nämlich analytisch aus die Polarebenen der drei Punkte auf den Coordinatenaxen, welche in dem Unendlichen liegen. Dass sich diese drei Polarebenen in dem Mittelpunkte der Oberfläche schneiden, lässt sich auch auf geometrischem Wege leicht einsehen.

Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche ergeben sich aus den Gleichungen (3), wenn man $p = 1$ setzt. In dieser Voraussetzung bestimmen die Gleichungen (3) die Werthe der Variabeln, welche die Function $f(x, y, z, 1)$ zu einem Maximum oder Minimum machen. Woraus sich folgende Regel abnehmen lässt:

Die Werthe der Variabeln, welche eine ganze Function des zweiten Grades $f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind die Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = o$.

Um auf analytischem Wege den Mittelpunkt zu bestimmen für eine Oberfläche zweiter Ordnung, die durch ihre Gleichung in Ebenencoordinaten gegeben ist:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) = o,$$

erinnern wir an die Gleichung des Poles einer Ebene (u_0, v_0, w_0, r_0) nach (6) der zwölften Vorlesung:

$$(5) \quad \ldots \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = o.$$

Die Ebene fällt in das Unendliche, wenn $u_0 = v_0 = w_0 = o$, und ihr Pol, der Mittelpunkt der Oberfläche, erhält zur Gleichung:

(6) . . . . $F'(r) = o$.

Diese Gleichung ist bekanntlich die Bedingung, unter welcher die in r quadratische Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln hat.

Wenn der Mittelpunkt der Oberfläche zugleich der Coordinatenanfangspunkt sein soll, so müssen die Gleichungen (3) erfüllt werden für $x = y = z = o$. Diese drei Bedingungen drücken aber aus, dass in der Gleichung der Oberfläche (1) die drei Glieder fehlen, welche die erste Potenz der Variablen p als Factor haben.

Soll die Gleichung (6) des Mittelpunktes der Oberfläche zugleich die des Coordinatenanfangspunktes sein, so müssen in ihr die drei ersten Glieder verschwinden, welche respective mit u, v, w multiplicirt sind, das heisst, in der Gleichung (4) der Oberfläche müssen die drei Glieder fehlen, welche die erste Potenz der Variabeln r als Factor haben.

Umgekehrt, wenn die genannten drei Glieder in der Gleichung (1) oder (4) verschwinden, so ist der Coordinatenanfangspunkt der Mittelpunkt der Oberfläche. Denn im ersten Falle bleibt die Gleichung (1) ungeändert, wenn man für p setzt $-p$, welches geometrisch ausdrückt, dass jede durch den Coordinatenanfangspunkt gezogene Sehne der Oberfläche in diesem Punkte halbirt wird; und im zweiten Falle bleibt die Gleichung (4) ungeändert, wenn man für r setzt $-r$, welches beweiset, dass parallele Tangentenebenen der Oberfläche von dem Coordinatenanfangspunkt in entgegengesetzter Richtung gleich weit abstehen.

Wir werden diese Bemerkung benutzen, um auf einem zweiten Wege die Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche zu bestimmen.

Hat man irgend ein zweites, dem zum Grunde gelegten rechtwinkligen Coordinatensystem, paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt die Coordinaten a, b, c hat, so ergeben sich aus der geometrischen Betrachtung leicht folgende Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes im ersten und den Coordinaten X, Y, Z desselben Punktes in dem zweiten System:

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c.$$

Wählt man aber statt der rechtwinkligen Coordinaten die homogenen Coordinaten, so ergeben sich daraus folgende Transformationsformeln:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= X + aP, & X &= x - ap, \\ y &= Y + bP, & Y &= y - bp, \\ z &= Z + cP, & Z &= z - cp, \\ p &= P, & P &= p. \end{aligned}$$

Die Gleichung einer Ebene:

$$ux + vy + wz + rp = o,$$

nimmt durch diese Substitutionen, wenn wir mit U, V, W, R die homogenen Coordinaten der Ebene bezeichnen bezüglich auf das zweite Coordinatensystem, die Gestalt an:

$$UX + VY + WZ + RP = o,$$

und die Vergleichung der linken Theile beider Gleichungen ergiebt folgende Transformationsformeln der Ebenencoordinaten:

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= U, & U &= u, \\ v &= V, & V &= v, \\ w &= W, & W &= w, \\ r &= R - aU - bV - cW, & R &= r + au + bv + cw. \end{aligned}$$

Durch diese Transformationsformeln gehen die Gleichungen (1) und (4) der Oberfläche zweiter Ordnung über in:

$$(9) \quad f\left\{X + aP,\ Y + bP,\ Z + cP,\ P\right\} = o.$$

$$(10) \quad F\left\{U,\ V,\ W,\ R - aU - bV - cW\right\} = o.$$

Es sind dieses die Gleichungen derselben Oberfläche zweiter Ordnung, bezogen auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt die rechtwinkligen Punktcoordinaten a, b, c hat. Die Grade der Gleichungen sind durch die Transformation ungeändert geblieben.

Der Mittelpunkt der Oberfläche ist zugleich Coordinatenanfangspunkt, wenn $a, b, c, 1$ für x, y, z, p gesetzt den Gleichungen (3) genügen, oder wenn diese Grössen proportional sind den Coefficienten von u, v, w, r in der Gleichung (6).

Diese die Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Oberfläche bestimmenden Gleichungen erhält man auch durch Entwickelung der Gleichungen (9) und (10), wenn man entweder die drei mit

der ersten Potenz von P multiplicirten Glieder einzeln gleich o setzt, oder wenn man die drei mit der ersten Potenz von R multiplicirten Glieder verschwinden lässt. Es lässt sich daher die homogene Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung durch blosse Aenderung des Coordinatenanfangspunktes im Allgemeinen auf die Form zurückführen, in welcher die drei mit der ersten Potenz der letzten Variabeln multiplicirten Glieder fehlen.

Die einzige Ausnahme von dieser Regel bildet der Fall, wenn der Mittelpunkt der Oberfläche in das Unendliche fällt, denn in dieser Voraussetzung kann man den Mittelpunkt nicht zum Coordinatenanfangspunkt machen.

Um die analytische Bedingung dieses Falles festzustellen, nehmen wir an, dass die Gleichungen der Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten und in Ebenencoordinaten seien:

$$(11) \quad \ldots \quad f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots\ldots = o,$$

$$(12) \quad \ldots \quad F = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots\ldots = o.$$

Den Mittelpunkt der Oberfläche $f = o$ bestimmen die Gleichungen (3):

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p = o,$$

$$\tfrac{1}{2}f'(y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p = o,$$

$$\tfrac{1}{2}f'(z) = a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p = o.$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die rechtwinkligen Coordinaten $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ des Mittelpunktes als die Unbekannten und löset die Gleichungen auf, so stellen sich bekanntlich die Werthe der Unbekannten als Brüche dar mit demselben Nenner:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Verschwindet dieser Nenner, so werden die Coordinaten des Mittelpunktes unendlich gross, und der Mittelpunkt fällt in das Unendliche.

Die Gleichung des Mittelpunktes der Oberfläche $F = o$ ist nach (6):

$$\tfrac{1}{2}F'(r) = e_{30}u + e_{31}v + e_{32}w + e_{33}r = o,$$

woraus sich die rechtwinkligen Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Oberfläche ergeben:

$$(14) \quad \ldots \ldots \quad a = \frac{e_{32}}{e_{33}}, \quad b = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad c = \frac{e_{32}}{e_{33}},$$

welche unendlich gross werden, wenn der gemeinsame Nenner verschwindet.

Der Mittelpunkt der Oberfläche $f = o$ oder $F = o$ fällt daher in das Unendliche unter der Bedingung:

$$(15) \quad \ldots \ldots \quad D = o \text{ oder } e_{33} = o.$$

Man unterscheidet nun Oberflächen zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt haben von den Oberflächen zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt in das Unendliche fällt, von welchen man sagt, dass sie keinen Mittelpunkt haben. Jede von den Gleichungen (15) ist die Bedingung für die letzte Gattung von Oberflächen zweiter Ordnung. Ihre homogenen Gleichungen lassen sich nicht auf die Form zurückführen, in welcher die mit der ersten Potenz der letzten Variabeln multiplicirten Glieder gänzlich fehlen.

Vierzehnte Vorlesung.

Criterium des Kegels zweiter Ordnung. Tangentenkegel der Oberfläche zweiter Ordnung.

Unter den Oberflächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkt verdient eine besondere Beachtung diejenige, deren Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt.

Es sei:

$$(1) \quad \ldots \quad f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer solchen Oberfläche. Die Coordinaten des Mittelpunktes derselben bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$f'(x) = o, \quad f'(y) = o, \quad f'(z) = o.$$

Setzt man die Werthe dieser Coordinaten in die Gleichung der Oberfläche,

$$2f = xf'(x) + yf'(y) + zf'(z) + pf'(p) = o,$$

so muss in dem vorliegenden Falle die Gleichung erfüllt werden. Daraus erhält man aber:

$$f'(p) = o.$$

Wenn daher die Oberfläche (1) die angegebene Eigenschaft haben soll, so müssen sich Werthe der Variabeln bestimmen lassen, welche den vier Gleichungen zu gleicher Zeit genügen:

$$(2) \quad \ldots \quad f'(x) = o, \quad f'(y) = o, \quad f'(z) = o, \quad f'(p) = o,$$

von welchen die drei ersten den Mittelpunkt der Oberfläche bestimmen und die letzte ausdrückt, dass der Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt.

Es liegen hier vier homogene Functionen $\frac{1}{2}f'(x)$, $\frac{1}{2}f'(y)$, $\frac{1}{2}f'(z)$, $\frac{1}{2}f'(p)$ der vier Variabeln vor, welche für ein System Werthe der Variabeln verschwinden. Es verschwindet also nach Satz (8) der achten Vorlesung auch die Determinante dieser Functionen; und man hat die Bedingungsgleichung:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = o$$

zwischen den Coefficienten in der Gleichung (1) der Oberfläche von der bezeichneten Art.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Oberflächen zweiter Ordnung, dass die Polarebenen aller Punkte des Raumes sämmtlich durch den Mittelpunkt der Oberfläche gehen. Denn die Gleichungen der Polarebenen aller Punkte des Raumes werden nach (2) für den Mittelpunkt erfüllt.

Um eine zweite Eigenschaft dieser Gattung Oberflächen herzuleiten, bezeichnen wir mit x, y, z, p die Coordinaten des Mittelpunktes, mit x_0, y_0, z_0, p_0 die Coordinaten eines beliebig auf der Oberfläche gewählten Punktes. Die Coordinaten $x + \lambda x_0$, $y + \lambda y_0$, $z + \lambda z_0$, $p + \lambda p_0$ eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie beider genügen der Gleichung:

$$(4) \quad \ldots \quad f(x + \lambda x_0,\ y + \lambda y_0,\ z + \lambda z_0,\ p + \lambda p_0) = o,$$

welchen Werth auch der unbestimmte Factor λ habe. Denn entwickelt man die Gleichung nach Potenzen von λ, so verschwindet das erste Glied, weil der Mittelpunkt auf der Oberfläche liegt. Ebenso verschwindet das letzte Glied der Entwickelung, weil der Punkt o auf der Oberfläche liegt. Es verschwindet endlich der Factor der ersten Potenz von λ:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad x_0 f'(x) + y_0 f'(y) + z_0 f'(z) + p_0 f'(p) = o$$

auf Grund der Gleichungen (2). Die Verbindungslinie fällt mithin ihrer ganzen Länge nach in die Oberfläche, und die ganze Oberfläche kann als entstanden gedacht werden durch Drehung einer geraden Linie um den Mittelpunkt.

Eine solche Oberfläche nennt man einen Kegel. Die behandelte Gattung von Oberflächen sind also Kegel zweiter Ordnung, und die Gleichung (3) ist die Bedingungsgleichung für den Kegel (1). Er charakterisirt sich dadurch, dass sein Mittelpunkt, die Spitze des Kegels, in der Oberfläche selbst liegt.

Es bleibt noch übrig nachzuweisen, dass auch jeder Kegel $f = o$ der zweiten Ordnung, der durch Drehung einer geraden Linie um seine Spitze entstanden ist, der Gleichung (3) genügt. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass x, y, z, p die Coordinaten der Spitze und x_0, y_0, z_0, p_0 die Coordinaten eines beliebigen Punktes o auf der Kegelfläche seien. Da nun jeder Punkt der Verbindungslinie dieser beiden Punkte auf der Kegelfläche liegt, so wird für jeden Werth von λ der Gleichung (4) Genüge geschehen, die durch Entwickelung übergeht in (5). Dieser Gleichung wird nun für jeden Punkt o des Kegels genügt. Sie ist aber, wenn man den Punkt o als variabel betrachtet, die Gleichung einer Ebene. Es müsste also entweder der letzteren Gleichung für jeden Punkt o des Kegels genügt werden können, welcher auch ausserhalb der Ebene liegt, oder die Ebene müsste ein Theil des Kegels sein, oder endlich müsste der Gleichung (5) durch die Gleichungen (2) Genüge geschehen. Der erste Fall ist als unstatthaft zu verwerfen. In dem zweiten Falle wird die Function f in das Product von zwei linearen Factoren zerfallen und der Kegel in ein Ebenenpaar. Dann genügt aber jeder Punkt der Schnittlinie der beiden Ebenen den Gleichungen (2). Es bleibt also nur der dritte Fall übrig, in welchem man die Gleichungen (2) hat, aus welchen durch Elimination die Bedingung (3) hervorgeht.

Die Gleichung des Kegels zweiter Ordnung in Punktcoordinaten lässt sich nicht so wie die Gleichungen aller übrigen Oberflächen zweiter Ordnung durch Ebenencoordinaten ausdrücken. Denn die reciproke Function F von f erhält, da nach (3) $A = o$ ist, nach (18) der zehnten Vorlesung einen unendlich grossen Factor $\frac{1}{A}$. [Lässt man diesen Factor fort, so stellt die Gleichung $A.F = o$ nicht mehr den Kegel dar, sondern diese Gleichung ist das Quadrat der Gleichung eines Punktes, nämlich der Spitze des Kegels.]

Es sei nun die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(6) \quad \ldots \quad f = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots \ldots \ldots \ldots = o,$$

welche sich von der Gleichung des Kegels (1) nur dadurch unterscheiden soll, dass der Coefficient a_{33}, der dort durch die Gleichung (3) als Function der anderen Coefficienten bestimmt ist, in dieser Gleichung irgend einen Werth habe.

Die drei ersten Gleichungen (3) bestimmen unter dieser Voraussetzung die Spitze des Kegels (1), wie den Mittelpunkt der Oberfläche (6). Es fallen also beide Punkte in einen zusammen. Zieht man die Gleichung des Kegels von der Gleichung der Oberfläche ab, so erhält man:

$$p^2 = o,$$

die Gleichung eines in eine Ebene zusammenfallenden Ebenenpaares in dem Unendlichen. Dieses beweiset, dass der Kegel die Oberfläche in dem Unendlichen ringsum berührt.

Einen solchen Kegel, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung liegt und der die Oberfläche berührt, nennt man Asymptoten-Kegel der Oberfläche zweiter Ordnung. Man erhält also die Gleichung des Asymptoten-Kegels aus der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, wenn man in der homogenen Gleichung der Oberfläche dem Coefficienten des mit dem Quadrat der letzten Variabeln multiplicirten Gliedes einen solchen Werth beilegt, dass die Oberfläche ein Kegel wird.

Aus der auf den Mittelpunkt transformirten Gleichung (9) der dreizehnten Vorlesung der Oberfläche zweiter Ordnung fallen in

der Entwickelung nicht allein die mit der ersten Potenz von P multiplicirten Glieder fort, sondern, wenn die Oberfläche ein Kegel ist, auch das mit P^2 multiplicirte Glied:

$$f(a, b, c, 1) P^2,$$

weil der Mittelpunkt zugleich ein Punkt der Oberfläche ist. Es wird daher durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in die Spitze des Kegels (1) die Gleichung desselben:

$$(7) \ldots f(X, Y, Z) = a_{00} X^2 + a_{11} Y^2 + a_{22} Z^2 + 2a_{12} YZ + 2a_{20} ZX + 2a_{01} XY = o,$$

eine Gleichung, welche aus der allgemeinen Gleichung (1) des Kegels zweiter Ordnung hervorgeht, indem man $p = o$, und für x, y, z respective setzt X, Y, Z.

Da man eine von den 6 in die Gleichung (7) eingehenden Constanten durch Division gleich der Einheit machen kann, so gehen in die Gleichung nur 5 willkürliche Constanten in linearer Weise ein, von welchen allein die Natur des Kegels abhängt. Diese 5 Constanten werden unzweideutig durch 5 Punkte des Kegels bestimmt sein. Man hat daher den Satz, auf welchen wir in der vierten Vorlesung hingewiesen haben:

Durch 5 von ein und demselben Punkte ausgehende gerade Linien lässt sich nur ein Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen;

oder mit anderen Worten:

Der Kegel zweiter Ordnung ist durch 5 seiner Kanten unzweideutig bestimmt.

Dass jede durch die Spitze des Kegels zweiter Ordnung gelegte Ebene den Kegel nur in zwei geraden Linien schneidet, eine Voraussetzung, die wir ebenfalls an der bezeichneten Stelle gemacht haben, geht daraus hervor, dass eine gerade Linie den Kegel zweiter Ordnung, als speciellen Fall der Oberfläche zweiter Ordnung nur in zwei Punkten schneidet.

Die Gleichung der Polarebene eines beliebigen Punktes X, Y, Z, P rücksichtlich des Kegels (7) ist, wenn man mit X_0, Y_0, Z_0, P_0 die variabeln Coordinaten bezeichnet:

$$(8) \ldots \ldots X_0 f'(X) + Y_0 f'(Y) + Z_0 f'(Z) = o,$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Es geht mithin die Polarebene eines beliebigen Punktes im Raume immer durch die Spitze des Kegels. Eine Ausnahme davon macht die Spitze des Kegels selbst. Denn die Gleichung (8) ihrer Polarebene wird illusorisch.

Da in die Gleichung (8) die Variable P gar nicht eingeht, so werden die verschiedenen Punkte auf einer durch die Spitze des Kegels gehenden geraden Linie alle dieselbe Polarebene haben. Eine Ebene, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, hat keinen Pol, weil die Polarebenen aller Punkte des Raumes durch die Spitze des Kegels gehen. Man wird daher zu Polarebenen des Kegels nur solche Ebenen wählen können, welche durch die Spitze gehen. Bezeichnen wir aber mit U, V, W, R die Coordinaten der Polarebene, so ergeben sich hiernach aus (8) folgende Relationen zwischen den Coordinaten des Poles und der Polarebene des Kegels:

$$(9) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}f'(X) = U, \quad \tfrac{1}{2}f'(Y) = V, \quad \tfrac{1}{2}f'(Z) = W, \quad o = R.$$

Wenn nun $F(U, V, W)$ die reciproke Function der Function $f(X, Y, Z)$ ist, so hat man erstens auf Grund der Substitutionen (9):

$$(10) \quad \ldots \quad F(U, V, W) = f(X, Y, Z),$$

und zweitens die Auflösungen der linearen Gleichungen (9):

$$(11) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}F'(U) = X, \quad \tfrac{1}{2}F'(V) = Y, \quad \tfrac{1}{2}F'(W) = Z, \quad R = o.$$

Lässt man den Pol in die Kegelfläche fallen, so erhält man aus (10) und (11) die Bedingungen für die Tangentenebenen des Kegels:

$$(12) \quad \ldots \quad \begin{aligned} F(U, V, W) &= o, \\ R &= o, \end{aligned}$$

oder allgemeiner, wenn man mit B irgend einen linearen homogenen Ausdruck der Ebenencoordinaten bezeichnet:

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{aligned} F(U, V, W) + BR &= o, \\ R &= o. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen mit den 10 darin vorkommenden Coefficienten stellt eine Oberfläche zweiter Ordnung durch Ebenencoordinaten dar, und die letzte ist die Gleichung der Spitze

des Kegels. Setzt man daher in die beiden Gleichungen (13) die Werthe von U, V, W, R aus (8) der dreizehnten Vorlesung, um die Oberfläche und die Spitze des Kegels auf das ursprüngliche Coordinatensystem zu beziehen, so nehmen jene Gleichungen (13) die Form an:

$$(14) \quad \begin{aligned} F(u, v, w, r) &= o, \\ A &= o, \end{aligned}$$

indem die zweite lineare Gleichung die Spitze des Kegels darstellt.

Man sieht hieraus, dass der Kegel zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten durch zwei Gleichungen ausgedrückt wird und zwar als Tangentenkegel irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einer beliebigen Spitze. Hiernach ist man zu dem Schlusse berechtiget:

Der Tangentenkegel einer Oberfläche zweiter Ordnung ist selbst eine Oberfläche zweiter Ordnung.

Da in die Gleichungen des Kegels (12) in Ebenencoordinaten mit gegebener Spitze im Coordinatenanfangspunkt nur die Verhältnisse von 6 Constanten in linearer Weise eingehen, so hat man den Satz:

Der Kegel zweiter Ordnung ist durch 5 seiner Tangentenebenen unzweideutig bestimmt, und jede 5 Ebenen, welche durch ein und denselben Punkt gehen, lassen sich als 5 Tangentenebenen eines unzweideutig bestimmten Kegels zweiter Ordnung betrachten.

Bezeichnen wir mit X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Punktes der in der Spitze des Kegels (12) auf der Tangentenebene (U, V, W, R) errichteten Normale, so hat man:

$$U = \lambda X, \quad V = \lambda Y, \quad W = \lambda Z.$$

Setzt man diese Werthe in (12), so erhält man:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F(X, Y, Z) = o,$$

die Gleichung eines neuen Kegels zweiter Ordnung, welcher beschrieben wird von den in der Spitze des Kegels (12) auf den Tangentenebenen desselben errichteten Normalen.

Ebenso lässt sich aus (7) nachweisen, dass:

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{aligned} f(U,\ V,\ W) &= o, \\ R &= o \end{aligned}$$

die Gleichungen des Kegels sind in Ebenencoordinaten, welcher von den durch die Spitze des Kegels (7) gelegten Ebenen, die auf den Kanten dieses Kegels senkrecht stehen, berührt wird.

Diese Bemerkungen drücken wir als reciproke Sätze aus, von welchen in Uebertragung auf die Kugeloberfläche in der vierten Vorlesung bereits Erwähnung gethan worden ist:

Wenn eine Ebene sich als Tangentenebene um einen Kegel zweiter Ordnung herumbewegt, so beschreibt die in der Spitze des Kegels auf der Ebene errichtete Normale wieder einen Kegel zweiter Ordnung.

Wenn eine gerade Linie durch Drehung um einen Punkt in ihr einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt, so berührt die Ebene, welche in dem Drehungspunkte auf der geraden Linie senkrecht steht, wieder einen Kegel zweiter Ordnung.

Um den Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung auch durch Punktcoordinaten auszudrücken, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Man weiss, wenn $f = o$ und $\varphi = o$ die Gleichungen zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung sind, dass die Gleichung:

$$f + \lambda\varphi = o$$

jede Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welche durch die Schnittcurve der gegebenen Oberflächen hindurchgeht. Ist φ das Product zweier linearer Ausdrücke U_0, U_1, so ist die zweite gegebene Oberfläche ein Ebenenpaar $U_0 = o$, $U_1 = o$.

Diese Ebenen stellen wir dar als die Polarebenen zweier Punkte: (x_0, y_0, z_0, p_0), (x_1, y_1, z_1, p_1) rücksichtlich der ersten gegebenen Oberfläche, indem wir setzen:

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{aligned} U_0 &= x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0), \\ U_1 &= x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) + p f'(p_1). \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f + \lambda\, U_0\, U_1 = o$$

mit dem willkürlichen Factor λ der analytische Ausdruck für alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurven der Ebenen $U_0 = o$, $U_1 = o$ und der Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ hindurchgehen.

Damit die Oberfläche (18) aber vollständig bestimmt werde, muss noch ein Punkt in ihr gegeben sein, der im Raume willkürlich gewählt werden kann. Wählt man den Pol der Ebene $U_0 = o$, so ergiebt sich der diesem Punkte entsprechende Werth von λ aus (18), wenn man für die Variabeln in jener Gleichung die Coordinaten des Punktes setzt. Setzt man aber den so bestimmten Werth von λ wieder in die Gleichung (18), so erhält man die Gleichung:

$$(19) \ldots 2f(x,y,z,p)\left\{x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1)\right\}$$
$$- \left\{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0)\right\}$$
$$\times \left\{x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) + p f'(p_1)\right\} = o$$

der Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch den Schnitt des Ebenenpaares $U_0 = o$, $U_1 = o$ mit der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ und zugleich durch den Pol der ersten Ebene hindurchgeht. Die Bemerkung, dass die Gleichung (19) ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 mit einander vertauscht, geometrisch gedeutet, giebt den Satz.

Wenn man durch den Schnitt zweier Ebenen mit einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung eine andere Oberfläche zweiter Ordnung hindurchlegt, welche durch den Pol einer jener Ebenen geht, so geht diese Oberfläche auch durch den Pol der anderen Ebene.

Fallen die beiden Ebenen in eine zusammen und damit auch ihre Pole in ein und denselben Punkt, so erhält man eine Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4f(x,y,z,p)\,.\,f(x_0,y_0,z_0,p_0)$$
$$- \left\{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0)\right\}^2 = o,$$

welche die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ in der durch die Ebene $U_0 = o$ hervorgebrachten Schnittcurve berührt. Dass diese Oberfläche zweiter Ordnung aber ein Kegel ist, ersieht man daraus, dass die vier partiellen Differentialquotienten des linken Theiles der Gleichung (20) nach den Variabeln genommen verschwinden, wenn man in ihnen für die Variabeln die Coordinaten x_0, y_0, z_0, p_0 des Poles jener Ebene setzt. Dieser Pol ist folglich die Spitze des Kegels zweiter Ordnung.

Die Gleichung (20) stellt also den Tangentenkegel dar, welcher von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0, z_0, p_0) als Spitze an die Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ gelegt ist. Seine Basis ist die Schnittcurve der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ und einer beliebigen Ebene $U_0 = o$. Bezeichnet man daher mit dem Namen Kegelschnitt die Schnittcurve einer Ebene und eines Kegels zweiter Ordnung, so hat man den Satz:

Alle Ebenen schneiden eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung in Kegelschnitten.

Da sich aber nach der Definition des Kegelschnittes durch ihn immer ein Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen lässt, und nach einem vorangegangenen Satze der Kegel zweiter Ordnung durch 5 Kanten desselben bestimmt ist, so folgt daraus:

Der Kegelschnitt ist durch 5 Punkte auf ihm unzweideutig bestimmt.

Fällt die Spitze des Tangentenkegels in die gegebene Oberfläche, so verschwindet das erste Glied der Gleichung (20) und der übrige Theil der Gleichung stellt die Tangentenebene der gegebenen Oberfläche $f = o$ dar.

Um einen anderen speciellen Fall des Tangentenkegels hervorzuheben, stellen wir die Gleichung (20) desselben also dar:

$$2 f(x, y, z, p) \left\{x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0) + p_0 f'(p_0)\right\}$$
$$- \left\{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0)\right\}^2 = o.$$

Fällt die Spitze dieses Tangentenkegels in den Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$, so hat man $f'(x_0) = o$, $f'(y_0) = o$, $f'(z_0) = o$, wodurch die Gleichung sich also vereinfacht:

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad f(x, y, z, p) - \frac{f'(p_0)}{2 p_0} \cdot p^2 = o.$$

Dieses ist aber die Gleichung des Asymptotenkegels. Denn es ist der Coefficient des Quadrates der letzten Variabeln in der homogenen Gleichung $f = o$ der gegebenen Oberfläche so bestimmt, dass die Oberfläche ein Kegel wird.

Fünfzehnte Vorlesung.

Criterium der Grenzfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche zweiter Ordnung aufgefasst.

Wenn es unter den, durch ihre Gleichungen in Punktcoordinaten gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung solche giebt, die Kegel, welche sich analytisch nicht durch eine Gleichung in Ebenencoordinaten darstellen lassen, so muss die Reciprocität unserer Betrachtungsweise nothwendig auf analytische Ausdrücke der Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten führen, welche sich in Punktcoordinaten eben so wenig durch eine Gleichung darstellen lassen. Diese Gattung von Oberflächen zweiter Ordnung wird den Gegenstand der gegenwärtigen Vorlesung bilden.

Wir werden Grenzfläche der zweiten Ordnung diejenige Oberfläche zweiter Ordnung nennen, in Rücksicht auf welche die Pole aller Ebenen im Raume auf ein und derselben Ebene liegen.

Es sei:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad F = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots\ldots = o$$

die Gleichung einer Grenzfläche in Ebenencoordinaten. Bezeichnet man mit u_0, v_0, w_0, r_0 die variabeln Coordinaten irgend einer Ebene im Raume, und mit u, v, w, r die Coordinaten einer gegebenen Ebene, so ist die Gleichung des Poles der letzteren Ebene:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = o.$$

Soll dieser Pol aber für alle Ebenen u_0, v_0, w_0, r_0 in ein und derselben Ebene liegen, so müssen bestimmte Werthe von u, v, w, r dieser Gleichung genügen unabhängig von den Werthen der Coordinaten u_0, v_0, w_0, r_0, das heisst, es müssen diese Werthe den vier Gleichungen genügen:

$$(3) \quad \ldots \quad F'(u) = o, \quad F'(v) = o, \quad F'(w) = o, \quad F'(r) = o.$$

Diese vier Gleichungen mit den vier Unbekannten u, v, w, r sind also die Bedingungen für die Grenzfläche zweiter Ordnung (1).

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Unbekannten u, v, w, r, so erhält man die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung (1) der Grenzfläche zweiter Ordnung:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad E = \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03} \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix} = o.$$

Dass die Grenzfläche in Punktcoordinaten $f = o$ sich nicht durch diese eine Gleichung darstellen lässt, ist daraus ersichtlich, dass analog (18) der zehnten Vorlesung:

$$f = -\frac{1}{E} \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03}, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & z \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & p \\ x, & y, & z, & p, & o \end{vmatrix}$$

und dass die Function f, welche gleich o gesetzt die Gleichung der Grenzfläche in Punktcoordinaten sein würde, den Factor $\frac{1}{E} = \infty$ mit sich führt.

Was die Ebene anbelangt, in welcher die Pole aller Ebenen des Raumes liegen, so werden die Coordinaten derselben durch die Gleichungen (3) unzweideutig bestimmt. Wir werden diese Ebene, die Ebene der Grenzfläche zweiter Ordnung nennen.

Da die Pole aller Ebenen des Raumes in ihr liegen, so liegen auch die Berührungspunkte der Tangentenebenen der Grenzfläche in ihr. Mit anderen Worten, alle Punkte der Grenzfläche liegen in der Ebene der Grenzfläche.

Um eine neue Eigenschaft der Grenzfläche zu entdecken, dient folgende Betrachtung: Es seien u, v, w, r die Coordinaten der Ebene der Grenzfläche, und u_0, v_0, w_0, r_0 die Coordinaten irgend einer Tangentenebene der Grenzfläche. Alsdann sind $u + \lambda u_0, v + \lambda v_0, w + \lambda w_0, r + \lambda r_0$ die Coordinaten irgend einer Ebene, welche durch die gerade Linie geht, in der sich die erstgenannten Ebenen schneiden. Diese Coordinaten genügen der Gleichung (1):

$$(6) \quad . \; . \; . \quad F(u + \lambda u_0, \;\; v + \lambda v_0, \;\; w + \lambda w_0, \;\; r + \lambda r_0) = o.$$

Denn entwickelt man dieselbe nach Potenzen von λ, so verschwindet das erste und letzte Glied, weil die genannten Ebenen Tangentenebenen der Grenzfläche sind. Es verschwindet aber auch das mit der ersten Potenz von λ multiplicirte Glied:

$$(7) \quad . \; . \; . \quad u_0 F'(u) + v_0 F'(v) + w_0 F'(w) + r_0 F'(r) = o$$

auf Grund der Gleichungen (3).

Hiernach ist jede Ebene Tangentenebene der Grenzfläche, welche durch die gerade Linie geht, in der sich die Ebene der Grenzfläche und irgend eine Tangentenebene derselben schneiden. Umgekehrt wird man auch nach Analogie der correspondirenden Stelle in der vorhergehenden Vorlesung leicht beweisen können, dass, wenn jede Ebene, die, durch die Schnittlinie einer festen Ebene und einer beliebigen Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung gelegt, wieder eine Tangentenebene derselben Oberfläche ist, die Oberfläche eine Grenzfläche sein muss.

Setzt man in der Gleichung (1) der Grenzfläche $r = o$, so erhält man:

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad F(u, \;\; v, \;\; w, \;\; o) = o,$$

die Gleichung des Tangentenkegels der Grenzfläche, dessen Spitze in dem Coordinatenanfangspunkt liegt.

Da dieser Kegel zweiter Ordnung die Grenzfläche ringsum einhüllt, die Grenzfläche selbst aber ihrer ganzen Ausdehnung nach in die Ebene der Grenzfläche fällt, so sieht man, dass die Grenzfläche von dem Kegelschnitt begrenzt wird, in welchem sich der bezeichnete Tangentenkegel und die Ebene der Grenzfläche schneiden.

Diesen, die Grenzfläche begrenzenden, Kegelschnitt kann man für die Grenzfläche selbst nehmen, wenn es sich um die Tangen-

tenebenen der Grenzfläche handelt. Denn die Tangentenebenen des Kegelschnittes, das sind die Ebenen, welche durch die Tangenten des Kegelschnittes gehen, sind Tangentenebenen der Grenzfläche, und umgekehrt geht jede Tangentenebene der Grenzfläche durch eine Tangente des Kegelschnittes.

Fassen wir diese Bemerkungen kurz zusammen, so können wir sagen:

Die Grenzfläche zweiter Ordnung fällt ihrer ganzen Ausdehnung nach in eine Ebene, und wird in dieser Ebene von einem Kegelschnitt begrenzt.

Drückt man den Tangentenkegel (8) durch Punktcoordinaten aus, was nach der vorhergehenden Vorlesung ausführbar ist, weil die Spitze des Kegels im Coordinatenanfangspunkt liegt, so stellt sich die Grenzfläche dar als die Curve, in welcher dieser Kegel von der Ebene der Grenzfläche $ux + vy + wz + rp = o$ geschnitten wird. Die Grenzfläche zweiter Ordnung wird hiernach in Punktcoordinaten durch zwei homogene Gleichungen dargestellt, von denen die eine vom zweiten, die andere vom ersten Grade ist.

Liegt der Coordinatenanfangspunkt zufälliger Weise in der Ebene der Grenzfläche (1), so kann man diese Betrachtungen nicht alle anstellen. In diesem Falle transformire man die Gleichung (1) der Grenzfläche mit Hilfe von (8) der dreizehnten Vorlesung auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt nicht in der Ebene der Grenzfläche liegt, und gehe statt von (1) von der transformirten Gleichung der Grenzfläche aus.

Ein specieller Fall der Grenzfläche zweiter Ordnung ist der, wenn die Gleichung (1) in zwei lineare Factoren zerfällt, also die Oberfläche zweiter Ordnung ein Punktenpaar darstellt. Denn in dieser Voraussetzung genügen die Coordinaten der Ebenen, welche durch die beiden Punkte gehen, den Gleichungen (3). Der die Grenzfläche begrenzende Kegelschnitt ist dann das von den beiden Punkten begrenzte Stück der durch sie gehenden geraden Linie, und die Ebene der Grenzfläche ist jede durch die beiden Punkte gelegte Ebene.

Es lässt sich aber auch jede Schnittfläche einer Ebene und einer beliebig gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche ausdrücken, wie die folgende Betrachtung lehren wird.

Wenn $F = o$ und $\Phi = o$ die Gleichungen von irgend zwei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten sind, so weiss man, dass die Gleichung:

$$F + \lambda\Phi = o$$

jede Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welche von sämmtlichen, den beiden gegebenen Oberflächen gemeinsamen, Tangentenebenen berührt wird. Zerfällt Φ in das Product zweier linearer Ausdrücke V_0, V_1, so stellt die zweite gegebene Oberfläche ein Punktenpaar dar $V_0 = o$, $V_1 = o$.

Diese Punkte fassen wir auf als die Pole zweier gegebenen Ebenen (u_0, v_0, w_0, r_0), (u_1, v_1, w_1, r_1) rücksichtlich der ersten gegebenen Oberfläche, indem wir setzen:

$$(9) \ldots \begin{aligned} V_0 &= u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0) + r F'(r_0), \\ V_1 &= u F'(u_1) + v F'(v_1) + w F'(w_1) + r F'(r_1). \end{aligned}$$

Alsdann hat man die allgemeinste Gleichung:

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F + \lambda V_0 V_1 = o$$

der Oberflächen zweiter Ordnung, welche sämmtliche Tangentenebenen der gegebenen Oberfläche berühren, die durch den einen oder den anderen oder durch beide gegebene Punkte gehen. Es ist dieses also eine Oberfläche zweiter Ordnung, die jeden der beiden von den gegebenen Punkten an die Oberfläche $F = o$ gelegten Tangentenkegel ringsum berührt.

Diese Oberfläche (10) wird vollständig bestimmt sein, wenn der Factor λ einen bestimmten Werth erhält. Bestimmt man daher diesen Factor λ so, dass die Oberfläche die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ berührt, indem man in der Gleichung (10) für die Variabeln setzt u_0, v_0, w_0, r_0, und setzt den Werth von λ in (10) ein, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} (11) \ldots 2F(u, v, w, r) & \left\{u_0 F'(u_1) + v_0 F'(v_1) + w_0 F'(w_1) + r_0 F'(r_1)\right\} \\ & - \left\{u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0) + r F'(r_0)\right\} \\ & \times \left\{u F'(u_1) + v F'(v_1) + w F'(w_1) + r F'(r_1)\right\} = o \end{aligned}$$

der ganz bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung, welche die beiden Tangentenkegel der Oberfläche $F = o$ ringsum berührt, und welche zugleich von der Polarebene des Punktes $V_0 = o$ berührt wird.

Der Umstand, dass die Gleichung (11) ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 mit einander vertauscht, geometrisch gedeutet, giebt den zu dem drittletzten Satze der vorhergehenden Vorlesung reciproken Satz:

Jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche zwei Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ringsum berührt, wird von den Polarebenen der Spitzen beider Kegel berührt, wenn eine von diesen Polarebenen die Oberfläche berührt.

Fallen die beiden Punkte $V_0 = o$ und $V_1 = o$ in einen zusammen, so erhält man aus (11) die Gleichung:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4F(u, v, w, r) \,.\, F(u_0, v_0, w_0, r_0) - \left\{uF'(u_0) + vF'(v_0) + wF'(w_0) + rF'(r_0)\right\}^2 = o$$

einer Oberfläche zweiter Ordnung, von welcher man weiss, dass sie die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ berührt, dass sie ferner den aus diesem Punkte an die Oberfläche $F = o$ gelegten Tangentenkegel ringsum berührt; aber dieses reicht nicht aus, die Oberfläche (12) vollständig zu definiren. Sie wird erst dadurch bestimmt, dass man nachweiset, dass sie überdies eine Grenzfläche zweiter Ordnung ist, und dass die Ebene derselben die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ ist. Dieser Nachweis wird darin gefunden, dass man sieht, wie die partiellen Differentialquotienten des linken Theiles der Gleichung (12) nach den Variabeln genommen für die Werthe u_0, v_0, w_0, r_0 dieser Variabeln verschwinden. Denn dieses ist nach (3) das Kriterium der Grenzfläche.

Hiernach ist die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ rücksichtlich der gegebenen Oberfläche $F = o$ die Ebene der Grenzfläche (12), welche begrenzt wird durch den Tangentenkegel, der von dem Punkte $V_0 = o$ als Spitze an die Oberfläche $F = o$ gelegt ist, oder welche begrenzt ist durch den Kegelschnitt, in dem die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ die Oberfläche $F = o$ schneidet.

Nimmt man diesen die Grenzfläche (12) begrenzenden Kegelschnitt für die Grenzfläche selbst, indem man nur die Tangentenebenen des Kegelschnittes ins Auge fasst, so kann man auch sagen,

dass die Gleichung (12) den Kegelschnitt darstelle, in welchem die Polarebene des Punktes $V_0 = o$ die Oberfläche $F = o$ schneidet.

Sechszehnte Vorlesung.

Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen.

Durch die Schnittcurve zweier durch ihre Gleichungen in homogenen Punktcoordinaten:

$$(1) \ldots \quad \begin{aligned} f &= a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots = o, \\ \varphi &= b_{00}x^2 + 2b_{01}xy + b_{11}y^2 + \ldots = o \end{aligned}$$

gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung hindurchlegen, welche alle durch die eine Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ ausgedrückt werden:

$$(2) \ldots \ldots \quad f + \lambda\varphi = o.$$

Da die Coefficienten in dieser Gleichung nach Vorlesung 14 nur eine Bedingungsgleichung zu erfüllen haben, wenn die Oberfläche (2) ein Kegel sein soll, so wird der willkürliche Factor λ sich immer so bestimmen lassen, dass der Bedingungsgleichung genügt wird. Es wird also immer ein Kegel zweiter Ordnung durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung gelegt werden können. Dieses trifft auch zu, wenn die zweite gegebene Oberfläche $\varphi = o$ ein Ebenenpaar ist, in welchem Falle die Schnittcurve der beiden gegebenen Oberflächen in zwei ebene Curven der Oberfläche $f = o$ zerfällt. Man wird darin einen neuen Beweis des Satzes erblicken, dass eine Oberfläche zweiter Ordnung durch jede Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird.

Um die Anzahl der Kegel zweiter Ordnung zu ermitteln, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen (1) hindurchgehen, muss man die erwähnte Bedingungsgleichung selbst aufstellen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, x, y, z, p seien die

Coordinaten der Spitze des Kegels (2). Alsdann hat man nach (2) der vierzehnten Vorlesung:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} f'(x) + \lambda\varphi'(x) &= o, \\ f'(y) + \lambda\varphi'(y) &= o, \\ f'(z) + \lambda\varphi'(z) &= o, \\ f'(p) + \lambda\varphi'(p) &= o, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination der Coordinaten die gesuchte Bedingungsgleichung erhält:

$$(4) \ldots\ldots \Delta = \begin{vmatrix} a_{00}+\lambda b_{00}, & a_{01}+\lambda b_{01}, & \ldots & a_{03}+\lambda b_{03} \\ a_{10}+\lambda b_{10}, & a_{11}+\lambda b_{11}, & \ldots & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{20}+\lambda b_{20}, & a_{21}+\lambda b_{21}, & \ldots & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{30}+\lambda b_{30}, & a_{31}+\lambda b_{31}, & \ldots & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix} = o.$$

Es ist dieses eine in λ biquadratische Gleichung, und jeder Wurzel derselben entspricht ein Kegel. Daher hat man den Satz:

Durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich vier Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen.

Bezeichnet man mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die vier Wurzeln der Gleichung (4), mit 0, 1, 2, 3 die Spitzen der vier Kegel, und durch Beifügung der Indices 0, 1, 2, 3 an die Variabeln respective die Coordinaten der vier Kegelspitzen, so erhält man aus (3) die vier Systeme Gleichungen:

$$(5) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} f'(x_0) + \lambda_0\varphi'(x_0) &= o, & f'(x_1) + \lambda_1\varphi'(x_1) &= o, \ldots\ldots \\ f'(y_0) + \lambda_0\varphi'(y_0) &= o, & f'(y_1) + \lambda_1\varphi'(y_1) &= o, \ldots\ldots \\ f'(z_0) + \lambda_0\varphi'(z_0) &= o, & f'(z_1) + \lambda_1\varphi'(z_1) &= o, \ldots\ldots \\ f'(p_0) + \lambda_0\varphi'(p_0) &= o, & f'(p_1) + \lambda_1\varphi'(p_1) &= o, \ldots\ldots \end{aligned}$$

aus welchen sich, wenn man die Wurzeln λ der biquadratischen Gleichung $\Delta = o$ als bekannt voraussetzt, die Coordinaten der vier Kegelspitzen durch Auflösung von linearen Gleichungen ergeben.

Um aus diesen Gleichungen andere zur geometrischen Interpretation geeignete Gleichungen abzuleiten, multipliciren wir das erste System Gleichungen respective mit x_1, y_1, z_1, p_1 und componiren durch Addition derselben eine neue Gleichung. Ebenso multipliciren wir das zweite System Gleichungen respective mit

x_0, y_0, z_0, p_0 und addiren. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung ziehen wir von der ersteren ab und erhalten:

$$(\lambda_0 - \lambda_1)\left\{x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0)\right\} = o.$$

Da nun der erste Factor nicht verschwinden kann, weil λ_0 und λ_1 verschiedene Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\varDelta = o$ sind, so verschwindet der zweite Factor, und man hat:

$$x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0) = o.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung geht die vorher aus dem erstem System (5) componirte Gleichung über in:

$$x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) = o.$$

Da man aber in gleicher Weise mit je zwei Systemen Gleichungen (5) verfahren kann, so erhält man allgemein, wenn man mit m und n irgend zwei verschiedene Zahlen 0, 1, 2, 3 bezeichnet:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_m\varphi'(x_n) + y_m\varphi'(y_n) + z_m\varphi'(z_n) + p_m\varphi'(p_n) &= o, \\ x_m f'(x_n) + y_m f'(y_n) + z_m f'(z_n) + p_m f'(p_n) &= o, \end{aligned}$$

woraus endlich folgt:

$$x_m\left\{f'(x_n) + \lambda\varphi'(x_n)\right\} + y_m\left\{f'(y_n) + \lambda\varphi'(y_n)\right\} + z_m\left\{f'(z_n) + \lambda\varphi'(z_n)\right\} + p_m\left\{f'(p_n) + \lambda\varphi'(p_n)\right\} = o.$$

Diese Gleichung beweiset den Satz:

Durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich vier Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen. Die Spitzen je zweier von ihnen sind harmonische Pole jeder Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchgeht.

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (4) $\varDelta = o$ verschieden seien. Sind zwei derselben gleich, so bedarf es einer besonderen Untersuchung dieses Falles, in welchem sich die beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ in einem Punkte berühren. Ein zweiter Fall, der zu beachten ist, ist der, wenn die biquadratische Gleichung zwei Paare gleicher Wurzeln hat, ein dritter Fall, wenn jene Gleichung drei gleiche Wurzeln hat. Wir gehen jedoch auf die Untersuchung dieser speciellen Fälle nicht weiter ein.

Vier Punkte im Raume, von denen jeder der harmonische Pol ist des andern in Rücksicht auf eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung nennt man ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Solcher Systeme harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung lassen sich eine unendliche Zahl bestimmen. Denn construirt man zu einem gegebenen Pol 0 einer Oberfläche zweiter Ordnung die Polarebene und nimmt auf dieser einen zweiten Punkt 1, auf der Schnittlinie der Polarebene von 0 und von 1 einen dritten Punkt 2 und bestimmt endlich auf der genannten Schnittlinie zum Punkte 2 den ihm zugeordneten Pol 3, so bilden die genannten vier Punkte ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche. Ein System harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung hat die charakteristische Eigenschaft, dass jede Ebene, welche durch drei von ihnen hindurchgeht, die Polarebene des vierten ist.

Was die vier Ebenen anbelangt, welche durch je drei aus einem System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung gelegt werden können, so haben sie die Eigenschaft, dass jede derselben harmonische Polarebene der andern ist.

Vier Ebenen, von welchen je zwei harmonische Polarebenen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sind, bilden ein System harmonischer Polarebenen der gegebenen Oberfläche.

Auf Grund dieser Definitionen und der bekannten Eigenschaften von Pol und Polarebene hat man die Sätze:

Die vier Ebenen, welche durch je drei aus einem System harmonischer Pole gelegt werden können, bilden ein System harmonischer Polarebenen,

Die vier Punkte, in welchen sich je drei Ebenen aus einem System harmonischer Polarebenen schneiden, bilden ein System harmonischer Pole,

auf welche Sätze gestützt wir den vorhergehenden auch so ausdrücken können:

Die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchlegen lassen, bilden ein System harmonischer Pole für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve gelegt werden kann, und zugleich die Ecken eines Te-

traeders, dessen Seitenflächen ein System harmonischer Polarebenen eben derselben Oberfläche sind.

Wir haben in dem Vorhergehenden, von den 16 Gleichungen (5) ausgehend, durch eine geschickte Art der Elimination der vier Grössen $\lambda_0, \ldots \lambda_3$ die 12 Gleichungen (6), die wir geometrisch deuten konnten, abgeleitet. Man kann aber auch umgekehrt, von den 12 Gleichungen (6) ausgehend, durch Einführung von vier neuen Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die 16 Gleichungen (5) ableiten. Um zu dem ersten von diesen Systemen zu gelangen, setzen wir in (6) $n = o$ und für m nach einander die Zahlen 1, 2, 3, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_1\varphi'(x_0) + y_1\varphi'(y_0) + z_1\varphi'(z_0) + p_1\varphi'(p_0) &= o, \\ x_2\varphi'(x_0) + y_2\varphi'(y_0) + z_2\varphi'(z_0) + p_2\varphi'(p_0) &= o, \\ x_3\varphi'(x_0) + y_3\varphi'(y_0) + z_3\varphi'(z_0) + p_3\varphi'(p_0) &= o. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0) &= o, \\ x_2 f'(x_0) + y_2 f'(y_0) + z_2 f'(z_0) + p_2 f'(p_0) &= o, \\ x_3 f'(x_0) + y_3 f'(y_0) + z_3 f'(z_0) + p_3 f'(p_0) &= o. \end{aligned}$$

Betrachtet man in dem ersten Systeme von drei Gleichungen die Grössen $\varphi'(x_0), \varphi'(y_0), \varphi'(z_0), \varphi'(p_0)$ als die Unbekannten, in dem zweiten Systeme die Grössen $f'(x_0), f'(y_0), f'(z_0), f'(p_0)$ als die Unbekannten, so sieht man, dass die beiden, die Verhältnisse der Unbekannten bestimmenden, Systeme Gleichungen sich nur durch die Ausdrucksweise der Unbekannten von einander unterscheiden. Das erste System Gleichungen muss daher durch Auflösung dasselbe Verhältniss der Unbekannten ergeben als das zweite. Das will sagen, dass sich ein Factor λ_0 finden lassen muss der Gestalt, dass:

$$f'(x_0) + \lambda_0\varphi'(x_0) = o, \quad f'(y_0) + \lambda_0\varphi'(y_0) = o\,, \ldots$$

Da nun die Gleichungen (6) die Bedingungen ausdrücken für ein System harmonischer Pole der Oberfläche $f = o$ und zugleich der Oberfläche $\varphi = o$, so erkennt man in der Zurückführung der Gleichungen (6) auf (5) den Beweis des Satzes:

Wenn vier Punkte im Raume ein System harmonischer Pole bilden für eine Oberfläche zweiter Ordnung und für noch eine Oberfläche derselben Ord-

nung, so sind die vier Punkte die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen hindurchlegen lassen.

Es giebt nur ein System harmonischer Pole für zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, weil durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen nur vier Kegel zweiter Ordnung gehen. Es giebt daher nur ein System harmonischer Polarebenen für zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, gebildet aus den Seitenflächen des Poltetraeders, dessen Ecken das den beiden Oberflächen gemeinschaftliche System harmonischer Pole bilden.

Hiernach ist das Problem der Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen, aequivalent mit dem Problem des beiden Oberflächen gemeinsamen Systemes harmonischer Pole. Wir können daher in dem Folgenden das letztere für das ursprüngliche nehmen.

Aus den zur Lösung eines Problems aufgestellten Gleichungen soll man immer den möglichst grössten Nutzen ziehen, wenn gleich die Folgerungen aus den Gleichungen nichts mehr zur Lösung des Problems beitragen. Denn in der Regel sind die durch solche Nebenbetrachtungen gewonnenen Resultate für sich, aus dem Zusammenhange mit dem Hauptproblem gebracht, viel schwerer nachzuweisen.

Wir kehren deshalb zu dem System Gleichungen (3) zurück, welches, unter der Voraussetzung, dass λ eine Wurzel der biquadratischen Gleichung $\Delta = o$, die Coordinaten der Spitze des durch die Schnittcurve der Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gelegten Kegels zweiter Ordnung bestimmt.

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen dieses Systemes (3) die Grösse λ, so erhält man die Gleichungen von 6 Oberflächen zweiter Ordnung:

$$f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x) = o, \quad f'(x)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(x) = o, \ldots \ldots,$$

welche sämmtlich durch die vier Spitzen der durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gelegten Kegel zweiter Ordnung hindurchgehen. Es ist daher:

$$(7) \ldots\ldots \chi = p_{01}[f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]$$
$$+ p_{02}[f'(x)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(x)] + p_{03}[f'(x)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(x)]$$
$$+ p_{23}[f'(z)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(z)] + p_{13}[f'(y)\varphi'(p) - f'(p)\varphi'(y)]$$
$$+ p_{12}[f'(y)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(y)] = o$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die vier Kegelspitzen geht. Es ist dieses aber auch zugleich die allgemeinste Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die vier Kegelspitzen gehen, weil sie die Verhältnisse von 6 willkürlichen Constanten $p_{\varkappa\lambda}$ mit sich führt. Denn diese Constanten lassen sich noch so bestimmen, dass die Oberfläche (7) überdies durch 5 gegebene Punkte hindurchgeht, wodurch die Oberfläche erst vollständig bestimmt ist.

Wenn man die Gleichung (7) entwickelt, so nimmt sie die Gestalt an:

$$(8) \ldots\ldots \chi = c_{00}x^2 + 2c_{01}xy + c_{11}y^2 + \ldots\ldots = o.$$

Die Coefficienten $c_{\varkappa\lambda}$ in dieser Gleichung genügen vier linearen Bedingungsgleichungen, weil die Oberfläche $\chi = o$ durch vier bestimmte Punkte, die vier Kegelspitzen, hindurchgeht. Von diesen vier Bedingungsgleichungen werden wir vorläufig nur eine entwickeln.

Zu diesem Zwecke erinnern wir an die Relationen (9) der zehnten Vorlesung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes der Oberfläche zweiter Ordnung $f = o$ und den Coordinaten der Tangentenebene in diesem Punkte:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = u, \quad \tfrac{1}{2}f'(y) = v, \quad \tfrac{1}{2}f'(z) = w, \quad \tfrac{1}{2}f'(p) = r.$$

Diese Relationen sind in grösserer Ausführlichkeit unter Berücksichtigung von (1):

$$a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p = u,$$
$$a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p = v,$$
$$a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p = w,$$
$$a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p = r.$$

Die Auflösung dieses Systemes Gleichungen giebt nach (12) der zehnten Vorlesung Gleichungen von der Form:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x, \quad \tfrac{1}{2}F'(v) = y, \quad \tfrac{1}{2}F'(w) = z, \quad \tfrac{1}{2}F'(r) = p.$$

welche durch Multiplication befreit von dem gemeinsamen Nenner A sich also gestalten:

$$\begin{aligned} A_{00}u + A_{10}v + A_{20}w + A_{30}r &= Ax, \\ A_{01}u + A_{11}v + A_{21}w + A_{31}r &= Ay, \\ A_{02}u + A_{12}v + A_{22}w + A_{32}r &= Az, \\ A_{03}u + A_{13}v + A_{23}w + A_{33}r &= Ap, \end{aligned}$$

indem $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$, weil $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, und $F = o$ oder $A.F = o$ die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist.

Zwischen den Coefficienten des ersten Systemes linearer Gleichungen und den Coefficienten ihrer Auflösungen hat man bekanntlich die Relationen:

$$\begin{aligned} A &= a_{\varkappa 0}A_{\varkappa 0} + a_{\varkappa 1}A_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2}A_{\varkappa 2} + a_{\varkappa 3}A_{\varkappa 3} \\ o &= a_{\varkappa 0}A_{\lambda 0} + a_{\varkappa 1}A_{\lambda 1} + a_{\varkappa 2}A_{\lambda 2} + a_{\varkappa 3}A_{\lambda 3}. \end{aligned}$$

Wir drücken diese Relationen zweckmässig in Worten also aus:

„Wenn man in der Entwickelung der 16 Ausdrücke:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}xf'(x), & \frac{1}{2}yf'(x), & \frac{1}{2}zf'(x), & \frac{1}{2}pf'(x), \\ \frac{1}{2}xf'(y), & \frac{1}{2}yf'(y), & \frac{1}{2}zf'(y), & \frac{1}{2}pf'(y), \\ \frac{1}{2}xf'(z), & \frac{1}{2}yf'(z), & \frac{1}{2}zf'(z), & \frac{1}{2}pf'(z), \\ \frac{1}{2}xf'(p), & \frac{1}{2}yf'(p), & \frac{1}{2}zf'(p), & \frac{1}{2}pf'(p), \end{array}$$

„für die Producte:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \ldots\ldots$$

„respective setzt:

$$A_{00}, \quad A_{01}, \quad A_{11}, \ldots\ldots,$$

„so gehen dieselben über in:

$$\begin{array}{llll} A, & o, & o, & o, \\ o, & A, & o, & o, \\ o, & o, & A, & o, \\ o, & o, & o, & A. \end{array}$$

Daraus folgt, dass das erste mit p_{01} multiplicirte Glied:

$$f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)$$

in der Gleichung (7) durch die gleiche Veränderung verschwindet. Denn dieses mit dem Factor $\frac{1}{4}$ multiplicirte Glied lässt sich ja so darstellen:

$$b_{01}\tfrac{1}{2}xf'(x) + b_{11}\tfrac{1}{2}yf'(x) + b_{21}\tfrac{1}{2}zf'(x) + b_{31}\tfrac{1}{2}pf'(x)$$
$$- b_{00}\tfrac{1}{2}xf'(y) - b_{01}\tfrac{1}{2}yf'(y) - b_{02}\tfrac{1}{2}zf'(y) - b_{03}\tfrac{1}{2}pf'(y).$$

Aber es verschwindet durch diese Veränderung nicht blos das erste Glied der Gleichung (7), sondern auch jedes der übrigen 5 Glieder. Es verschwindet daher auch die ganze Function χ durch die genannte Veränderung. Nimmt man nun statt der Function χ aus (7) ihre Entwickelung (8), so ergiebt sich daraus die eine von den linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten $e_{\varkappa\lambda}$:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e_{00}A_{00} + 2e_{01}A_{01} + e_{11}A_{11} + \ldots\ldots\ldots = o,$$

welcher alle Oberflächen zweiter Ordnung $\chi = o$ zu genügen haben, welche durch das den beiden Oberflächen zweiter Ordnung $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinschaftliche System harmonischer Pole hindurchgehen.

Bemerkt man aber, dass in die Gleichung (9), da die Grössen $A_{\varkappa\lambda}$ Functionen sind allein von den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$, die Coefficienten $b_{\varkappa\lambda}$ gar nicht eingehen, so sieht man, dass jede beliebige der Oberflächen zweiter Ordnung $\varphi = o$ auf die Bedingungsgleichung (9) keinen Einfluss ausübt. Die vier Punkte, durch welche die Oberfläche $\chi = o$ hindurchgeht, bilden daher nur ein System harmonischer Pole der Oberfläche $f = o$. Diese Bemerkung drücken wir als Satz aus wie folgt:

Wenn:

$$e_{00}x^2 + 2e_{01}xy + e_{11}y^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist in homogenen Punktcoordinaten und:

$$A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche zweiter Ordnung in homogenen Ebenencoordinaten, so ist:

$$e_{00}A_{00} + 2e_{01}A_{01} + e_{11}A_{11} + \ldots = o$$

die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche

durch irgend ein System harmonischer Pole der zweiten Oberfläche hindurchgehe.

Da wir in dem Folgendem von diesem Satze vielfältige Anwendungen zu machen haben werden, so fassen wir denselben als eine Regel auf, der wir folgenden Ausdruck geben:

Wenn:

$$e_{00}x^2 + 2e_{01}xy + e_{11}y^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten ist, und:

$$A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten, so erhält man die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche durch irgend ein System harmonischer Pole der zweiten Oberfläche hindurchgehe, entweder, wenn man in der Punktcoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$xx,\ \ xy,\ \ yy, \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Ebenencoordinatengleichung setzt:

$$A_{00},\ \ A_{01},\ \ A_{11}, \ldots$$

oder, wenn man in der Ebenencoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$uu,\ \ uv,\ \ vv, \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Punktcoordinatengleichung setzt:

$$e_{00},\ \ e_{01},\ \ e_{11}, \ldots$$

Der genannte Satz giebt die geometrische Bedeutung einer allgemeinen linearen Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der durch ihre Gleichung in Punktcoordinaten gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $\chi = o$. Durch ihn wird die analoge Frage für die Oberflächen zweiter Ordnung beantwortet, welche wir im Anfange der fünften Vorlesung für die Ebenen aufgeworfen und beantwortet haben. Die Bedingungsgleichung,

dass eine Oberfläche zweiter Ordnung durch einen gegebenen Punkt gehe, ist zwar auch eine lineare Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche, aber diese Bedingungsgleichung hat einen ganz speciellen Charakter. Denn sie enthält nicht 10 Constanten, sondern nur die 4 Coordinaten des gegebenen Punktes als Constanten.

Sind zwei Oberflächen zweiter Ordnung durch ihre Punktcoordinatengleichungen $\chi = o$ und $f = o$ gegeben, und man verlangt die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in diesen Gleichungen, welche erfüllt werden muss, wenn die erste Oberfläche $\chi = o$ durch irgend ein System harmonischer Pole der anderen Oberfläche $f = o$ hindurchgehen soll, so hat man die Oberfläche $f = o$ durch Ebenencoordinaten auszudrücken. Dieser Ausdruck ist nach (16) der zehnten Vorlesung, in der Voraussetzung, dass $f = o$ die erste Gleichung (1) ist, folgender:

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & w \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & r \\ u, & v, & w, & r, & o \end{vmatrix} = o.$$

In dieser durch Ebenencoordinaten ausgedrückten Gleichung der Oberfläche $f = o$ hat man für:

$$uu, \quad uv, \quad vv, \quad \ldots .$$

respective zu setzen die Coefficienten aus der Gleichung $\chi = o$:

$$e_{00}, \quad e_{01}, \quad e_{11}, \quad \ldots ,$$

um die gesuchte Bedingungsgleichung (9) zu erhalten.

Wir haben diese an sich einfachen Operationen zur Bildung der Gleichung (9) deshalb so weitläuftig auseinander gesetzt, weil dieselben sich in dem Folgenden mehrmals wiederholen werden in etwas complicirteren Ausdrücken.[2]

Von den vier linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $\chi = o$, welche diese Coefficienten zu erfüllen haben, wenn die Oberfläche durch das den beiden Oberflächen zweiter Ordnung $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen

soll, haben wir bisher nur eine, die Gleichung (9), hervorgehoben. Wir werden jetzt alle vier Bedingungsgleichungen aufstellen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Gleichung:

$$(10) \ldots\ldots\ldots \varkappa f + \lambda\varphi = o$$

mit ganz willkürlich gewählten Werthen von $\varkappa$ und λ eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, für welche das den beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole ebenfalls ein System harmonischer Pole ist. Die Oberfläche (8) $\chi = o$, welche durch das den genannten beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole geht, geht also auch durch ein System harmonischer Pole der Oberfläche (10). Die Bedingung, dass das Letztere zutreffe, erhalten wir nach der vorhin angegebenen Regel auf folgende Art. Wir drücken die Oberfläche (10) in Ebenencoordinaten aus wie folgt:

$$(11)\ldots \begin{vmatrix} \varkappa a_{00}+\lambda b_{00}, & \varkappa a_{01}+\lambda b_{01}, & \ldots & \varkappa a_{03}+\lambda b_{03}, & u \\ \varkappa a_{10}+\lambda b_{10}, & \varkappa a_{11}+\lambda b_{11}, & \ldots & \varkappa a_{13}+\lambda b_{13}, & v \\ \varkappa a_{20}+\lambda b_{20}, & \varkappa a_{21}+\lambda b_{21}, & \ldots & \varkappa a_{23}+\lambda b_{23}, & w \\ \varkappa a_{30}+\lambda b_{30}, & \varkappa a_{31}+\lambda b_{31}, & \ldots & \varkappa a_{33}+\lambda b_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots & r, & o \end{vmatrix} = o.$$

Wir entwickeln den linken Theil dieser Gleichung der Oberfläche (10) in Ebenencoordinaten nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r, indem wir setzen:

$$(12)\ldots \begin{vmatrix} \varkappa a_{00}+\lambda b_{00}, & \varkappa a_{01}+\lambda b_{01}, & \ldots & \varkappa a_{03}+\lambda b_{03}, & u \\ \varkappa a_{10}+\lambda b_{10}, & \varkappa a_{11}+\lambda b_{11}, & \ldots & \varkappa a_{13}+\lambda b_{13}, & v \\ \varkappa a_{20}+\lambda b_{20}, & \varkappa a_{21}+\lambda b_{21}, & \ldots & \varkappa a_{23}+\lambda b_{23}, & w \\ \varkappa a_{30}+\lambda b_{30}, & \varkappa a_{31}+\lambda b_{31}, & \ldots & \varkappa a_{33}+\lambda b_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots & r, & o \end{vmatrix} =$$

$$= C_{00}u^2 + 2C_{01}uv + C_{11}v^2 + \ldots\ldots$$

Setzen wir hierauf diese Entwickelung gleich o, indem wir nach der angegebenen Regel die Potenzen und Producte der Variabeln $u^2, uv, v^2 \ldots$ respective verändern in $e_{00}, e_{01}, e_{11} \ldots$, so erhalten wir:

$$(13) \ldots\ldots e_{00}C_{00} + 2e_{01}C_{01} + e_{11}C_{11} + \ldots\ldots = o,$$

die Bedingung, dass die Oberfläche (8) $\chi = o$ durch ein System harmonischer Pole gehe der Oberfläche (10).

In dem weitern Verlauf unserer begonnenen Untersuchung werden wir vielfältig auf Gleichungen von der Form (13) geführt werden. Wir wählen daher, weil $e_{mn} = e_{nm}$ und $C'_{mn} = C'_{nm}$ ist, die folgende kürzere Darstellungsweise dieser Gleichung:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma e_{mn} C'_{mn} = o.$$

Die Gleichung (11) ist eine homogene in Rücksicht auf x und λ, und vom dritten Grade. In der Entwickelung (12) wird daher auch jeder Coefficient C'_{mn} homogen vom dritten Grade sein von der Form:

$$(15) \quad \ldots \quad C'_{mn} = x^3 C^{000}_{mn} + x^2\lambda C^{001}_{mn} + x\lambda^2 C^{011}_{mn} + \lambda^3 C^{111}_{mn}.$$

Denkt man sich diese Ausdrücke in die Gleichung (14) gesetzt, und beachtet, dass diese Gleichung für alle Werthe von x und λ erfüllt werden muss, so zerspaltet sich dieselbe in folgende vier Gleichungen:

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{array}{ll} \Sigma e_{mn} C^{000}_{mn} = o, & \Sigma e_{mn} C^{001}_{mn} = o, \\ \Sigma e_{mn} C^{011}_{mn} = o, & \Sigma e_{mn} C^{111}_{mn} = o, \end{array}$$

Dieses sind die vier gesuchten linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = o$, welche erfüllt werden müssen, wenn die Oberfläche durch das den beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Ein diesem System von vier Gleichungen äquivalentes System linearer Gleichungen würde man erhalten, wenn man die Bedingungen aufstellte, dass die Oberfläche (8) $\chi = o$ durch jede einzelne Spitze der vier Kegel gehe, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ legen lassen. Aber die Coordinaten dieser vier Kegelspitzen, die in die Bedingungsgleichungen eingehen, involviren noch, wie man gesehen hat, die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\Delta = o$, deren Kenntniss zur Aufstellung der Gleichungen (16) nicht nothwendig ist.

Wir werden jetzt die vier Bedingungsgleichungen aufstellen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8) $\chi = o$

zu erfüllen haben, wenn dieselbe durch das der ersten Oberfläche (1) $f = 0$ und einer dritten Oberfläche zweiter Ordnung $\psi = 0$:

$$(17) \ldots\ldots \quad \psi = c_{00}x^2 + 2c_{01}xy + c_{11}y^2 + \ldots\ldots = 0$$

gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Zu diesem Zwecke bilden wir die analoge Gleichung (11), indem wir in jener Gleichung für die Buchstaben b und λ die Buchstaben c und μ setzen, und entwickeln den linken Theil der so gebildeten Gleichung nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r wie folgt:

$$(18) \ldots \begin{vmatrix} \varkappa a_{00} + \mu c_{00}, & \varkappa a_{01} + \mu c_{01}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{03} + \mu c_{03}, & u \\ \varkappa a_{10} + \mu c_{10}, & \varkappa a_{11} + \mu c_{11}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{13} + \mu c_{13}, & v \\ \varkappa a_{20} + \mu c_{20}, & \varkappa a_{21} + \mu c_{21}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{23} + \mu c_{23}, & w \\ \varkappa a_{30} + \mu c_{30}, & \varkappa a_{31} + \mu c_{31}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{33} + \mu c_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots\ldots & r, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= B'_{00}u^2 + 2B'_{01}uv + B'_{11}v^2 + \ldots$$

Die der Gleichung (14), woraus sich schliesslich die vier Gleichungen (16) ergaben, nachgebildete Gleichung ist hiernach folgende:

$$(19) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma c_{mn} B'_{mn} = 0.$$

Beachten wir wieder, dass die Coefficienten B'_{mn} in der Entwickelung (18) von der Form sind:

$$(20) \ldots \quad B'_{mn} = \varkappa^3 B^{000}_{mn} + \varkappa^2\mu B^{002}_{mn} + \varkappa\mu^2 B^{022}_{mn} + \mu^3 B^{222}_{mn},$$

so ergeben sich aus der Gleichung (19) die verlangten vier Bedingungsgleichungen:

$$(21) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \Sigma c_{mn} B^{000}_{mn} &= 0, & \Sigma c_{mn} B^{002}_{mn} &= 0, \\ \Sigma c_{mn} B^{022}_{mn} &= 0, & \Sigma c_{mn} B^{222}_{mn} &= 0. \end{aligned}$$

Soll hiernach die Oberfläche (8) $\chi = 0$ durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen, also durch vier bestimmte Punkte, so müssen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = 0$ den vier linearen Bedingungsgleichungen (16) genügen. Soll die Oberfläche (8) $\chi = 0$ durch das den Oberflächen $f = 0$ und $\psi = 0$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen, also wieder durch vier bestimmte

Punkte, so müssen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche $\chi = o$ den vier linearen Bedingungsgleichungen (21) genügen. Soll endlich die Oberfläche (8) $\chi = o$ durch beide Systeme harmonischer Pole der Oberfläche $f = o$, also durch 8 bestimmte Punkte gehen, so haben die Coefficienten in der Gleichung (8) $\chi = o$ den 8 Gleichungen (16) und (21) zu gleicher Zeit zu genügen.

Man wird in dem Umstande, dass die Coefficienten in der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch 8 gegebene Punkte geht, auch 8 linearen Bedingungsgleichungen genügen, nur eine Bestätigung unserer im Anfange der neunten Vorlesung angeführten Thatsachen erblicken. Um so mehr muss es aber überraschen, wenn man sieht, wie in unserem Falle die 8 Bedingungsgleichungen (16) und (21) sich auf nur 7 Bedingungsgleichungen reduciren, indem die erste Gleichung (16) mit der ersten Gleichung (21) zusammenfällt.

Denn setzt man $\varkappa = 1$ und $\lambda = \mu = o$, so wird aus (15) und (20):

$$C'_{mn} = C^{000}_{mn}, \quad B'_{mn} = B^{000}_{mn},$$

während (12) und (18) die Entwickelung ein und desselben Ausdruckes nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r darstellen, nämlich:

$$C^{000}_{00} u^2 + 2 C^{000}_{01} u v + C^{000}_{11} v^2 + \ldots \quad \text{und:}$$

$$B^{000}_{00} u^2 + 2 B^{000}_{01} u v + B^{000}_{11} v^2 + \ldots$$

Da aber diese Entwickelungen Glied für Glied übereinstimmen müssen, so hat man:

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B^{000}_{mn} = C^{000}_{mn},$$

wodurch eben der Beweis geführt ist, dass die erste Gleichung (16) und die erste Gleichung (21) ein und dieselbe Gleichung sind.

Es tritt uns hier nun das Paradoxon entgegen, dass die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8) $\chi = o$ nur 7 linearen Bedingungsgleichungen (16) und (21) zu genügen brauchen, damit die Oberfläche durch 8 bestimmte Punkte gehe, nämlich durch das den Oberflächen $f = o$ und $\varphi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole und zugleich durch das den Oberflächen $f = o$ und $\psi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole.

Dieses Paradoxon findet seine Erklärung in dem in der neunten Vorlesung aufgestellten Satze, „dass alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte gehen, auch durch einen durch diese 7 Punkte bestimmten achten Punkt gehen." Denn wenn die 8 Punkte, durch welche eine Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgehen soll, im Raume so gewählt sind, dass sich in ihnen drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, welche nicht durch dieselbe Schnittcurve gehen, so reduciren sich die 8 Bedingungsgleichungen auf 7. Dieses ist aber gerade unser Fall. Denn es gehen alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 Punkte aus den beiden Systemen harmonischer Pole gehen, auch durch den achten Punkt.

Die beiden Systeme harmonischer Pole werden, wenn man die Oberfläche $f=o$ als gegeben betrachtet, die Oberflächen $\varphi=o$ und $\psi=o$ aber als veränderlich, irgend zwei Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $f=o$ sein. Von ihnen gilt daher dasselbe, was wir von den beiden gemeinsamen Systemen harmonischer Pole auseinander gesetzt haben. Wir können daher die vorausgegangenen Bemerkungen in doppelter Ausdrucksweise also wiedergeben:

Irgend zwei Systeme harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung bilden ein System von 8 Punkten, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, welche nicht durch dieselbe Schnittcurve gehen.

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 Punkte aus zwei Systemen harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgehen, gehen auch durch den achten Punkt.

Um die Umkehrung dieser Sätze zu rechtfertigen, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Wir bezeichnen mit 0, 1, 2, ... 7 irgend 8 Punkte im Raume, und durch Beifügung dieser 8 Zahlen als Indices der homogenen Coordinaten die Coordinaten der 8 Punkte. Wir vertheilen die 8 Punkte in zwei Systeme von vier 4 Punkten 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 und stellen, indem wir unter μ und ν irgend zwei verschiedene von den Zahlen 4, 5, 6, 7 verstehen, die 6 Bedingungen auf, welche zu erfüllen sind, wenn für eine Oberfläche zweiter Ord-

nung $f = o$ das zweite System von 4 Punkten ein System harmonischer Pole sein soll:

$$(23) \quad \ldots \quad x_\mu f'(x_\nu) + y_\mu f'(y_\nu) + z_\mu f'(z_\nu) + p_\mu f'(p_\nu) = o.$$

Wir drücken ferner die 6 Bedingungen aus, welche die Coefficienten in der Gleichung derselben Oberfläche $f = o$ zu erfüllen haben, wenn auch das erste System von 4 Punkten ein System harmonischer Pole sein soll:

$$(24) \quad \ldots \quad \begin{aligned} x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) + p_1 f'(p_2) &= o, \\ x_1 f'(x_3) + y_1 f'(y_3) + z_1 f'(z_3) + p_1 f'(p_3) &= o, \\ x_2 f'(x_3) + y_2 f'(y_3) + z_2 f'(z_3) + p_2 f'(p_3) &= o, \end{aligned}$$

$$(25) \quad \ldots \quad \begin{aligned} x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1) + p_0 f'(p_1) &= o, \\ x_0 f'(x_2) + y_0 f'(y_2) + z_0 f'(z_2) + p_0 f'(p_2) &= o, \\ x_0 f'(x_3) + y_0 f'(y_3) + z_0 f'(z_3) + p_0 f'(p_3) &= o. \end{aligned}$$

Wenn die 8 Punkte im Raume beliebig gegeben sind, so sieht man wohl, dass die 10 in die aufgestellten 12 Gleichungen (23), (24), (25) linear und homogen eingehenden Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche $f = o$ sich nicht so bestimmen lassen, dass allen diesen Gleichungen zugleich genügt wird. Dagegen lassen sich die Verhältnisse der genannten Coefficienten unzweideutig so bestimmen, dass den 6 Gleichungen (23) und zugleich den 3 Gleichungen (24) genügt wird, welches auch die 7 Punkte 1, 2, . . . 7 seien. Auf diese Weise ist die Oberfläche $f = o$ durch die 7 Punkte unzweideutig bestimmt. Bestimmt man hierauf den Punkt 0 als den Pol der durch 1, 2, 3 gelegten Ebene, nämlich so, dass seine Coordinaten den 3 in Rücksicht auf sie linearen Gleichungen (25) genügen, so hat man 2 Systeme harmonischer Pole der unzweideutig bestimmten Oberfläche $f = o$, von welchen die letzt genannten Sätze gelten. Dieser Punkt 0 ist demnach der achte Schnittpunkt von 3 Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die 7 beliebig gegebenen Punkte 1, 2, . . . 7 hindurchgehen, sich aber nicht in derselben Curve schneiden. Wir geben diese Bemerkungen in der Kürze also wieder:

Die 8 Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung, welche ausser den 8 Punkten weiter keinen

Punkt gemein haben, bilden in 2 Gruppen von 4 Punkten vertheilt 2 Systeme harmonischer Pole einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Da die Art der Vertheilung der 8 Schnittpunkte der 3 Oberflächen zweiter Ordnung willkürlich bleibt, so entspricht jeder anderen Vertheilungsart auch eine andere Oberfläche zweiter Ordnung.

Eine unmittelbare Folge aus dem vorletzten Satze ist der Satz:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch ein System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung geht, so geht dieselbe Oberfläche durch unendlich viele Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche.

Denn nimmt man auf der Oberfläche, welche durch ein System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche geht, einen Punkt 0 beliebig an, construirt die Polarebene dieses Punktes rücksichtlich der gegebenen Oberfläche, nimmt hierauf auf der Schnittcurve der Polarebene und der ersten Oberfläche einen zweiten Punkt 1, und construirt wieder die Polarebene rücksichtlich der gegebenen Oberfläche, so schneiden die beiden Polarebenen und die erste Oberfläche sich in 2 Punkten 2 und 3. Die Punkte 0, 1, 2 bilden dann ein unvollständiges System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche. Da aber die erste Oberfläche der Annahme nach durch ein vollständiges System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche geht, und da dieselbe Oberfläche auch durch das genannte unvollständige System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche geht, so geht sie auch durch den fehlenden Pol 3, weil dieser Pol nur auf der geraden Linie 23 liegen kann.

Von besonderem analytischen Interesse ist die lineare Bestimmung der Coordinaten des achten Schnittpunktes 0 von 3 Oberflächen zweiter Ordnung durch die Coordinaten der übrigen Schnittpunkte 1, 2, ..., 7. Denn setzt man die durch die Gleichungen (23) und (24) gegebenen Verhältnisse der Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche $f = o$ in die 3 Gleichungen (25), so enthalten diese in Rücksicht auf die Coordinaten des achten Schnittpunktes 0 linearen Gleichungen nichts als die Coordinaten der 8 Schnittpunkte.

Schliesslich entwickeln wir die 4 Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8) $\chi = o$ zu genügen haben, wenn diese Oberfläche durch das der zweiten Oberfläche (1) $\varphi = o$ und der Oberfläche (17) $\psi = o$ gemeinsame System harmonischer Pole gehen soll.

Wir bilden zu diesem Zwecke die analoge Gleichung (11), indem wir in jener Gleichung für die Buchstaben a und $\varkappa$ die Buchstaben c und μ setzen, und entwickeln den linken Theil der so veränderten Gleichung nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r wie folgt:

$$(26) \ldots \begin{vmatrix} \lambda b_{00} + \mu c_{00}, & \lambda b_{01} + \mu c_{01}, & \ldots\ldots & \lambda b_{03} + \mu c_{03}, & u \\ \lambda b_{10} + \mu c_{10}, & \lambda b_{11} + \mu c_{11}, & \ldots\ldots & \lambda b_{13} + \mu c_{13}, & v \\ \lambda b_{20} + \mu c_{20}, & \lambda b_{21} + \mu c_{21}, & \ldots\ldots & \lambda b_{23} + \mu c_{23}, & w \\ \lambda b_{30} + \mu c_{30}, & \lambda b_{31} + \mu c_{31}, & \ldots\ldots & \lambda b_{33} + \mu c_{33}, & r \\ u, & v, & \ldots\ldots & r, & o \end{vmatrix} =$$

$$= A'_{00} u^2 + 2 A'_{01} uv + A'_{11} v^2 + \ldots.$$

Alsdann hat man für beliebige Werthe von λ und μ die der Gleichung (14) entsprechende Bedingungsgleichung:

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma e_{mn} A'_{mn} = o.$$

Da aber nach der Entwickelung (26) die Ausdrücke A'_{mn} von der Form sind:

$$(28) \ldots\ldots \quad A'_{mn} = \lambda^3 A^{111}_{mn} + \lambda^2 \mu A^{112}_{mn} + \lambda \mu^2 A^{122}_{mn} + \mu^3 A^{222}_{mn},$$

so zerfällt die Gleichung (27) in die folgenden gesuchten Bedingungsgleichungen:

$$(29) \ldots\ldots \quad \begin{array}{ll} \Sigma e_{mn} A^{111}_{mn} = o, & \Sigma e_{mn} A^{112}_{mn} = o, \\ \Sigma e_{mn} A^{122}_{mn} = o, & \Sigma e_{mn} A^{222}_{mn} = o. \end{array}$$

Unter diesen 4 Bedingungsgleichungen befinden sich zwei, welche wir bereits entwickelt haben. Denn setzt man $\lambda = 1$, $\varkappa = \mu = o$, so wird nach (28) und (15) $A'_{mn} = A^{111}_{mn}$ und $C'_{mn} = C^{111}_{mn}$, und da unter diesen Umständen (26) und (12) die Entwickelungen desselben Ausdruckes darstellen, so hat man:

$$(30) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad C^{111}_{mn} = A^{111}_{mn}.$$

Ebenso findet man, wenn man die Entwickelungen von (26) und (18) vergleicht in der Voraussetzung, dass $\mu = 1$, $\varkappa = \lambda = o$, dass:

$$(31) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{222}_{mn} = B^{222}_{mn}.$$

Hiernach fällt die erste Gleichung (29) mit der letzten Gleichung (16) zusammen, und die letzte Gleichung (29) mit der letzten Gleichung (21), gleich wie die erste Gleichung (16) und die erste Gleichung (21) zusammenfielen.

Die 12 linearen Bedingungsgleichungen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung (8) $\chi = o$ zu erfüllen haben, wenn diese Oberfläche durch die drei betrachteten Systeme harmonischer Pole gehen soll, reduciren sich also auf 9 Bedingungen, welchen unter allen Umständen genügt werden kann. Was wir als geometrischen Satz also ausdrücken:

Durch die Spitzen der 12 Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve je zweier von drei Oberflächen zweiter Ordnung legen lassen, geht eine unzweideutig bestimmte Oberfläche zweiter Ordnung hindurch.

Wir legen auf diesen Satz besonders deshalb ein Gewicht, weil er lehrt aus den Coefficienten in den Gleichungen von irgend drei Oberflächen zweiter Ordnung in symmetrischer Weise die Coefficienten in der Gleichung einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung zu bilden, die eine leicht ausdrückbare geometrische Beziehung hat zu den gegebenen 3 Oberflächen zweiter Ordnung.

Es bedarf nicht der drei auseinandergesetzten Operationen, um die 9 linearen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (8) $\chi = o$ herzuleiten, wenn diese Oberfläche durch die genannten 12 Kegelspitzen gehen soll. Man kann diese drei Operationen in eine vereinigen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die drei Ausdrücke (12), (18), (26) sich durch folgenden darstellen lassen:

$$(32) \ldots \begin{vmatrix} \varkappa a_{00} + \lambda b_{00} + \mu c_{00}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{03} + \lambda b_{03} + \mu c_{03}, & u \\ \varkappa a_{10} + \lambda b_{10} + \mu c_{10}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{13} + \lambda b_{13} + \mu c_{13}, & v \\ \varkappa a_{20} + \lambda b_{20} + \mu c_{20}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{23} + \lambda b_{23} + \mu c_{23}, & w \\ \varkappa a_{30} + \lambda b_{30} + \mu c_{30}, & \ldots\ldots & \varkappa a_{33} + \lambda b_{33} + \mu c_{33}, & r \\ u, & \ldots\ldots & r, & o \end{vmatrix};$$

wenn man annimmt, dass eine von den drei Variabeln x, λ, μ, gleichviel welche, gleich o ist. Unter dieser Annahme erhalten wir nun die gesuchten Bedingungsgleichungen, indem wir den angegebenen Ausdruck (32) nach Potenzen und Producten der Variabeln u, v, w, r entwickeln, für $u^2, uv, v^2, \ldots$ respective setzen $e_{00}, e_{01}, e_{11}, \ldots$, den so geänderten Ausdruck (32), der eine homogene Function der Variabeln x, λ, μ von der dritten Ordnung ist, nach Potenzen und Producten dieser Variabeln entwickeln und die Coefficienten derselben in der Entwickelung einzeln gleich o setzen mit Ausnahme des zehnten Coefficienten, der mit dem Product $x\lambda\mu$ multiplicirt ist, welches unter jeder der obigen Annahmen verschwindet.

Verlangt man noch die Bildung des Ausdruckes (32) aus den gegebenen drei Oberflächen zweiter Ordnung $f = o, \varphi = o, \psi = o$, so braucht man sich nur daran zu erinnern, dass derselbe gleich o gesetzt die Oberfläche zweiter Ordnung ist in Ebenencoordinaten, welche in Punktcoordinaten sich also darstellt:

$$x f + \lambda\varphi + \mu\psi = o.$$

An diese allgemeinen Betrachtungen schliessen sich die folgenden speciellen Untersuchungen an.

In der Bestimmung eines Systems von vier harmonischen Polen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung herrscht, wie wir gesehen haben, eine grosse Willkür. Der erste Pol o kann ganz willkürlich genommen werden, der zweite 1 beliebig auf der Polarebene des ersten, der dritte 2 beliebig auf der Schnittlinie der Polarebenen der beiden ersten, wodurch endlich der vierte Pol 3 als der Schnittpunkt der Polarebenen der drei ersten Pole bestimmt ist. Wählt man den Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche als den ersten Pol, so fallen zwar die drei übrigen 1, 2, 3 in das Unendliche, jedoch bleiben die Richtungslinien 01, 02, 03, in welchen sie von dem Mittelpunkte aus gesehen werden. Die drei Sehnen der Oberfläche zweiter Ordnung, welche auf den genannten Richtungslinien von der Oberfläche begrenzt werden, nennt man **conjugirte Durchmesser** der Oberfläche zweiter Ordnung.

Auch die Bestimmung der Richtungen der conjugirten Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung enthält viel Willkürliches. Denn man kann einen Durchmesser beliebig durch den Mittelpunkt der Oberfläche gehen lassen. Der zweite durch den

Mittelpunkt gehende conjugirte Durchmesser wird beliebig gewählt werden können in der Polarebene des auf dem ersten Durchmesser unendlich entfernten Punktes. Der dritte conjugirte Durchmesser ist dann die Schnittlinie der Polarebenen der beiden auf den zwei ersten Durchmessern unendlich entfernten Punkte.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der conjugirten Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung, dass die Sehnen der Oberfläche zweiter Ordnung, welche dem einen Durchmesser parallel sind, halbirt werden durch die Ebene, welche durch die beiden anderen conjugirten Durchmesser gelegt ist. Diese Eigenschaft der conjugirten Durchmesser ist eine unmittelbare Folge aus ihrer Definition und der aus der zehnten Vorlesung bekannten Eigenschaften des Poles und der Polarebene. Wir bezeichnen diese Eigenschaft als eine charakteristische, weil auch der umgekehrte Satz gilt: Wenn die Sehnen einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche parallel laufen einem von drei Durchmessern der Oberfläche zweiter Ordnung, durch die Ebene halbirt werden, welche durch die beiden anderen Durchmesser gelegt ist, so sind die drei Durchmesser conjugirte Durchmesser. Denn der Mittelpunkt der Oberfläche und die drei auf den Durchmessern in dem Unendlichen liegenden Punkte bilden ein System harmonischer Pole der Oberfläche.

Man nennt die conjugirten Durchmesser Hauptaxen der Oberfläche zweiter Ordnung, wenn sie auf einander senkrecht stehen. Die Bestimmung derselben wird den Gegenstand einer späteren Vorlesung bilden.

Wenn zwei Systeme harmonischer Pole 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 einer Oberfläche zweiter Ordnung gegeben sind, so weiss man, dass jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch 7 von diesen Punkten hindurchgeht, auch durch den achten Punkt geht. Lässt man die Punkte 0 und 4 zusammenfallen, so bestimmen die 5 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06, als Kanten, einen Kegel zweiter Ordnung. Da dieser Kegel, eine Oberfläche zweiter Ordnung, durch 7 von den genannten Punkten hindurchgeht, so geht er auch durch den achten Punkt, und die gerade Linie 07 ist mithin auch eine Kante des Kegels. Man hat daher den Satz:

Wenn von zwei Systemen harmonischer Pole ein und derselben Oberfläche zweiter Ordnung ein Pol des einen Systemes mit einem Pole des anderen Systemes zusammenfällt, so liegen die von dem gemeinsamen Pole nach den 6 anderen Polen gezogenen geraden Linien auf einem Kegel zweiter Ordnung.

Rücken die beiden Punkte o und s in den Mittelpunkt der Oberfläche, so werden die 6 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06, 07 zwei Systeme conjugirter Durchmesser der Oberfläche, und man hat den Satz:

Irgend zwei Systeme conjugirter Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung sind 6 Kanten eines Kegels zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung durch ein System conjugirter Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung geht, so geht er durch unendlich viele Systeme conjugirter Durchmesser der Oberfläche.

Denn man kann jede Kante des Kegels als Durchmesser eines zweiten Systemes conjugirter Durchmesser betrachten. Die beiden anderen Durchmesser des Systemes, welche auf dem Kegel liegen, werden dadurch bestimmt sein.

Die um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius r beschriebene Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o$$

ist, wie aus der Gleichung ersichtlich, eine Oberfläche zweiter Ordnung. Jede drei durch den Mittelpunkt gelegte und auf einander senkrecht stehende gerade Linien sind nach dem Vorhergehenden conjugirte Durchmesser der Kugel, und von zwei solchen Systemen conjugirter Durchmesser gilt der Satz:

Zwei Systeme von drei aus demselben Punkte ausgehenden geraden Linien, welche auf einander senkrecht stehen, sind 6 Kanten eines Kegels zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung auf seiner Oberfläche drei auf einander senkrecht stehende Kanten

hat, so hat er unendlich viele Systeme von drei auf einander senkrecht stehenden Kanten.

Denn man kann jede beliebige Kante des Kegels als einem solchen Systeme zugehörig betrachten.

Da eine gerade Linie eine Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten schneidet, und eine Ebene dieselbe Oberfläche in einem Kegelschnitt schneidet, so muss auch eine gerade Linie, welche in der Ebene des Kegelschnittes liegt, denselben in zwei Punkten schneiden. Zwei Punkte in der Ebene des Kegelschnittes, deren Verbindungslinie den Kegelschnitt in harmonischen Punkten schneidet, sind harmonische Pole des Kegelschnittes. Drei Punkte, von welchen je zwei harmonische Pole des Kegelschnittes sind, bilden ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes.

Dieses vorausgesetzt, kehren wir zu der beschriebenen Raumfigur zurück. Wir hatten eine Oberfläche zweiter Ordnung und irgend zwei Systeme harmonischer Pole 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7, von welchen die Pole 0 und 4 in einen Punkt 04 zusammenfielen, mithin auch die Ebenen 1 2 3 und 5 6 7 in eine Ebene E. Diese Ebene E schneidet die Oberfläche in einem Kegelschnitt, in Rücksicht auf welchen die Punkte 1, 2, 3 ein System harmonischer Pole, die Punkte 5, 6, 7 ein zweites System harmonischer Pole bilden. Wir hatten ferner einen Kegel zweiter Ordnung, der durch die genannten beiden Systeme ging, und dessen Spitze in dem gemeinsamen Punkte 04 lag. Dieser Kegel wird von der Ebene E wieder in einem Kegelschnitt geschnitten, der durch die beiden Systeme harmonischer Pole des Kegelschnittes geht.

Sieht man ab von der Raumfigur und drückt die beschriebene Figur in der Ebene E durch Worte aus, so hat man den Satz:

Durch irgend zwei Systeme harmonischer Pole eines Kegelschnittes lässt sich wieder ein Kegelschnitt legen.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegelschnitt durch ein System harmonischer Pole eines gegebenen Kegelschnittes geht, so geht er durch unendlich viele Systeme harmonischer Pole des gegebenen Kegelschnittes.

Man kann den vorletzten Satz auch umkehren, wodurch er die Gestalt erhält:

Irgend 6 Punkte eines Kegelschnittes in zwei Gruppen von drei Punkten zertheilt bilden zwei Systeme harmonischer Pole eines bestimmten Kegelschnittes.

Auf die weitere Begründung dieses Satzes gehen wir jedoch nicht ein.

Werfen wir schliesslich einen Rückblick auf das am Anfange der Vorlesung behandelte Problem „die Spitzen der vier Kegel zu bestimmen, welche durch die Schnittcurve zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung $f = o$ und $\varphi = o$ hindurchgehen", so sehen wir, dass dasselbe sich rein algebraisch auffassen lässt. Das algebraische Problem lautet also:

Die linearen Substitutionen:

$$x = x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P,$$
$$y = y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P,$$
$$z = z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P,$$
$$p = p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P$$

so zu bestimmen, dass zwei gegebene homogene Functionen f und φ der Variabeln x, y, z, p von der zweiten Ordnung durch die Substitutionen transformirt werden in die Form:

$$f = \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2 + \mu_3 P^2,$$
$$\varphi = \nu_0 X^2 + \nu_1 Y^2 + \nu_2 Z^2 + \nu_3 P^2.$$

Denn macht man die angegebenen Substitutionen in den gegebenen Functionen f und φ, und lässt die Coefficienten der Producte der neuen Variabeln verschwinden, so erhält man gerade die 12 Gleichungen (6), welche die Coordinaten der vier Kegelspitzen bestimmen. Daraus ergiebt sich die geometrische Bedeutung der Coefficienten in den angegebenen Substitutionen des vorgelegten algebraischen Problemes. Sie stellen nämlich die homogenen Coordinaten der Spitzen der vier Kegel dar, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen zweiter Ordnung $f = o$ und $\varphi = o$ hindurchlegen lassen.

Wir begnügen uns an dieser Stelle den Zusammenhang des algebraischen Problems mit dem entsprechenden geometrischen Probleme dargelegt zu haben als Einleitung in die achtzehnte Vorlesung, in welcher das erweiterte algebraische Problem ausführlicher wird behandelt werden.

Siebenzehnte Vorlesung.

Grenzflächen zweiter Ordnung, welche acht beliebig gegebene Ebenen berühren.

Acht Tangentenebenen bestimmen eine Oberfläche zweiter Ordnung nicht vollständig. Es seien daher:

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{aligned} F &= A_{00}u^2 + 2A_{01}uv + A_{11}v^2 + \ldots = o, \\ \Phi &= B_{00}u^2 + 2B_{01}uv + B_{11}v^2 + \ldots = o \end{aligned}$$

die homogenen Gleichungen zweier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren. Unter dieser Voraussetzung stellt die Gleichung:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F + \lambda\Phi = o$$

mit dem willkürlichen Factor λ alle Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche die 8 gegebenen Ebenen berühren, oder, um einen anderen Ausdruck zu brauchen, welche die den gegebenen beiden Oberflächen gemeinsamen Tangentenebenen berühren.

Unter den Oberflächen (2) wird wenigstens eine Grenzfläche zu finden sein, weil der unbestimmte Factor λ sich immer so bestimmen lässt, dass der in (4) der fünfzehnten Vorlesung entwickelten einzigen Bedingung für die Grenzfläche Genüge geschieht. Das heisst, es giebt wenigstens einen Kegelschnitt, welcher von 8 beliebig gegebenen Ebenen berührt wird.

Um die Anzahl der verschiedenen Grenzflächen (2) zu bestimmen, nehmen wir an, dass der Factor λ in jener Gleichung der Grenzfläche entspreche, und dass u, v, w, r die Coordinaten

der Ebene der Grenzfläche seien. In dieser Voraussetzung hat man auf Grund (3) der fünfzehnten Vorlesung:

$$(3) \quad \begin{aligned} F'(u) + \lambda\, \Phi'(u) &= o, \\ F'(v) + \lambda\, \Phi'(v) &= o, \\ F'(w) + \lambda\, \Phi'(w) &= o, \\ F'(r) + \lambda\, \Phi'(r) &= o, \end{aligned}$$

woraus sich durch Elimination der Coordinaten ergiebt:

$$(4) \ldots \nabla = \begin{vmatrix} A_{00} + \lambda B_{00}, & A_{01} + \lambda B_{01}, & \ldots & A_{03} + \lambda B_{03} \\ A_{10} + \lambda B_{10}, & A_{11} + \lambda B_{11}, & \ldots & A_{13} + \lambda B_{13} \\ A_{20} + \lambda B_{20}, & A_{21} + \lambda B_{21}, & \ldots & A_{23} + \lambda B_{23} \\ A_{30} + \lambda B_{30}, & A_{31} + \lambda B_{31}, & \ldots & A_{33} + \lambda B_{33} \end{vmatrix} = o.$$

Diese Gleichung ist eine biquadratische in λ. Daher hat man den Satz:

Es giebt vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche alle zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsamen Tangentenebenen berühren;

oder mit anderen Worten:

Es giebt vier Kegelschnitte, welche von 8 beliebig gegebenen Ebenen berührt werden.

Bezeichnet man mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (4), mit 0, 1, 2, 3 die Ebenen der vier Grenzflächen, und durch Beifügung der Indices 0, 1, 2, 3 an die Variabeln respective die Coordinaten der Ebenen der vier Grenzflächen, so ergeben sich auf dem in der vorhergehenden Vorlesung eingeschlagenen Wege die Gleichungen:

$$(5) \ldots \begin{aligned} u_m \Phi'(u_n) + v_m \Phi'(v_n) + w_m \Phi'(w_n) + r_m \Phi'(r_n) &= o, \\ u_m F'(u_n) + v_m F'(v_n) + w_m F'(w_n) + r_m F'(r_n) &= o, \end{aligned}$$

in welchen m und n irgend zwei verschiedene von den Zahlen 0, 1, 2, 3 bedeuten, und daraus endlich:

$$u_m\{F'(u_n) + \lambda\Phi'(u_n)\} + v_m\{F'(v_n) + \lambda\Phi'(v_n)\} + w_m\{F'(w_n) + \lambda\Phi'(w_n)\} + r_m\{F'(r_n) + \lambda\Phi'(r_n)\} = o,$$

welche Gleichung folgende geometrische Deutung zulässt:

Es giebt vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche 8 gegebene Ebenen berühren. Die Ebenen dieser vier Grenzflächen bilden ein System harmonischer Polarebenen jeder Oberfläche zweiter Ordnung, welche die 8 gegebenen Ebenen berührt.

Da die vier Punkte, in welchen sich je drei Ebenen aus einem Systeme harmonischer Polarebenen schneiden, ein System harmonischer Pole bilden, so schneiden sich je drei Ebenen der vier Grenzflächen in vier Punkten, die ein System harmonischer Pole für alle jene Oberflächen zweiter Ordnung bilden. Diese Bemerkung, zusammengehalten mit den Resultaten der vorhergehenden Vorlesung, giebt den Satz:

Das zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsame System harmonischer Pole ist nicht allein ein System harmonischer Pole für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der beiden gegebenen Oberflächen hindurchgeht, sondern auch für jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche alle gemeinsamen Tangentenebenen der gegebenen beiden Oberflächen berührt. Die vier Ebenen, welche je drei harmonische Pole des Systemes verbinden, sind die Ebenen der vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche die gemeinsamen Tangentenebenen der gegebenen beiden Oberflächen berühren.

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen (3) den Factor λ, so erhält man die Gleichungen von sechs Oberflächen zweiter Ordnung, welche das den gegebenen beiden Oberflächen gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren. Componirt man aus diesen Gleichungen die Gleichung:

$$(6) \;\ldots\ldots\; X = q_{01}\left\{F'(u)\,\Phi'(v) - F'(v)\,\Phi'(u)\right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + q_{23}\left\{F'(w)\,\Phi'(r) - F'(r)\,\Phi'(w)\right\} = o$$

mit den sechs willkürlichen Constanten q_{mn}, so stellt diese Gleichung in Ebenencoordinaten eine jede Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche das genannte System harmonischer Polarebenen berührt.

Zwischen den Coefficienten in der Entwickelung dieser Gleichung:

$$(7) \ldots\ldots\; X = E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots\ldots = o$$

finden vier lineare Bedingungsgleichungen statt, von welchen wir eine besonders hervorheben, aus der die übrigen ohne Schwierigkeit hervorgehen.

Um die Gleichung der Oberfläche $F = o$ in Punktcoordinaten zu übertragen, hat man nach den Vorschriften der zehnten Vorlesung bekanntlich die linearen Gleichungen aufzulösen:

$$\tfrac{1}{2}F'(u) = x,\; \tfrac{1}{2}F'(v) = y,\; \tfrac{1}{2}F'(w) = z,\; \tfrac{1}{2}F'(r) = p,$$

welche in dem vorliegenden Falle, wo die Function F durch (1) gegeben ist, sich also gestalten:

$$\begin{aligned}
A_{00}u + A_{01}v + A_{02}w + A_{03}r &= x,\\
A_{10}u + A_{11}v + A_{12}w + A_{13}r &= y,\\
A_{20}u + A_{21}v + A_{22}w + A_{23}r &= z,\\
A_{30}u + A_{31}v + A_{32}w + A_{33}r &= p.
\end{aligned}$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen von der Form:

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = u,\; \tfrac{1}{2}f'(y) = v,\; \tfrac{1}{2}f'(z) = w,\; \tfrac{1}{2}f'(p) = r$$

befreit von dem gemeinsamen Nenner a seien:

$$\begin{aligned}
a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}p &= au,\\
a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}p &= av,\\
a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}p &= aw,\\
a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}p &= ar,
\end{aligned}$$

indem $f = o$ oder $af = o$ die Gleichung der Oberfläche ist in Punktcoordinaten. Alsdann hat man zwischen den 10 Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ und den 10 Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ die Relationen:

$$\begin{aligned}
a &= A_{\varkappa 0}a_{\varkappa 0} + A_{\varkappa 1}a_{\varkappa 1} + A_{\varkappa 2}a_{\varkappa 2} + A_{\varkappa 3}a_{\varkappa 3},\\
o &= A_{\varkappa 0}a_{\lambda 0} + A_{\varkappa 1}a_{\lambda 1} + A_{\varkappa 2}a_{\lambda 2} + A_{\varkappa 3}a_{\lambda 3},
\end{aligned}$$

welche wir in Worten also ausdrücken:

„Wenn man in der Entwickelung der 16 Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}u F'(u),\ \ \tfrac{1}{2}v F'(u),\ \ \tfrac{1}{2}w F'(u),\ \ \tfrac{1}{2}r F'(u),$$
$$\tfrac{1}{2}u F'(v),\ \ \tfrac{1}{2}v F'(v),\ \ \tfrac{1}{2}w F'(v),\ \ \tfrac{1}{2}r F'(v),$$
$$\tfrac{1}{2}u F'(w),\ \ \tfrac{1}{2}v F'(w),\ \ \tfrac{1}{2}w F'(w),\ \ \tfrac{1}{2}r F'(w),$$
$$\tfrac{1}{2}u F'(r),\ \ \tfrac{1}{2}v F'(r),\ \ \tfrac{1}{2}w F'(r),\ \ \tfrac{1}{2}r F'(r),$$

„für die Producte:

$$uu,\ \ uv,\ \ vv, \ldots.$$

„respective setzt:

$$a_{00},\ \ a_{01},\ \ a_{11}, \ldots,$$

„so gehen dieselben über in:

$$\begin{matrix} a, & o, & o, & o, \\ o, & a, & o, & o, \\ o, & o, & a, & o, \\ o, & o, & o, & a.“ \end{matrix}$$

Daraus folgt, dass das erste mit q_{01} multiplicirte Glied:

$$F'(u)\,\Phi'(v) - F'(v)\,\Phi'(u)$$

in der Gleichung (6) durch die gleiche Veränderung verschwindet. Aber es verschwindet durch diese Veränderung ebenso jedes Glied der Gleichung (6) und es wird auch die Gleichung (7) nach der genannten Veränderung erfüllt.

Es ist daher:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma E_{mn}\, a_{mn} = o$$

eine von den Bedingungsgleichungen, die erfüllt werden müssen, wenn die Oberfläche (7) $X = o$ das den beiden Oberflächen (1) $F = o$ und $\Phi = o$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll.

Da diese Gleichung (8) unabhängig ist von der Natur der Oberfläche $\Phi = o$, weil die Coefficienten aus der Gleichung der Oberfläche nicht in sie eingehen, so hat man zu ihrer Bildung folgende Regel:

Wenn:

$$E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist, und:

$$a_{00}x^2 + 2a'_{01}xy + a'_{11}y^2 + \ldots = o$$

die Gleichung einer zweiten Oberfläche in Punktcoordinaten, so erhält man die Bedingungsgleichung, dass die erste Oberfläche irgend ein System harmonischer Polarebenen der zweiten Oberfläche berührt, entweder indem man in der Ebenencoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$uu,\quad uv,\quad vv,\ \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Punktcoordinatengleichung setzt:

$$a_{00},\quad a_{01},\quad a_{11},\ \ldots$$

oder wenn man in der Punktcoordinatengleichung für die Producte der Variabeln:

$$xx,\quad xy,\quad yy,\ \ldots$$

respective die Coefficienten aus der Ebenencoordinatengleichung setzt:

$$E_{00},\quad E_{01},\quad E_{11},\ \ldots$$

Aus dem Vergleich dieser Regel mit der entsprechenden der vorhergehenden Vorlesung, oder der geometrischen Bedeutung der Gleichung (8) mit (9) der vorhergehenden Vorlesung geht folgender Satz hervor:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch irgend ein System harmonischer Pole einer zweiten Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgeht, so berührt die erste Oberfläche ein System harmonischer Polarebenen der zweiten Oberfläche.

Um aus der angegebenen Regel die vier linearen Bedingungsgleichungen abzuleiten, welche die Coefficienten in der Gleichung (7) $X = o$ zu erfüllen haben, wenn die durch sie dargestellte Oberfläche das den beiden Oberflächen $F = o$ und $\Phi = o$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll, bemerken wir, dass, welches auch die Werthe von $\varkappa$ und λ seien, die Gleichung:

$$\varkappa F + \lambda \Phi = o$$

eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, welcher jenes System harmonischer Polarebenen ebenfalls zugehört.

Drücken wir daher diese Oberfläche durch ihre Gleichung in Punktcoordinaten aus wie folgt:

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \varkappa A_{00} + \lambda B_{00}, & \ldots & \varkappa A_{03} + \lambda B_{03}, & x \\ \varkappa A_{10} + \lambda B_{10}, & \ldots & \varkappa A_{13} + \lambda B_{13}, & y \\ \varkappa A_{20} + \lambda B_{20}, & \ldots & \varkappa A_{23} + \lambda B_{23}, & z \\ \varkappa A_{30} + \lambda B_{30}, & \ldots & \varkappa A_{33} + \lambda B_{33}, & p \\ x, & \ldots & p, & o \end{vmatrix} = o,$$

und setzen in der Entwickelung nach Potenzen und Producten der variabeln Coordinaten für:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \ldots .$$

respective: $\quad E_{00}, \quad E_{01}, \quad E_{11}, \ldots .,$

so erhalten wir eine Gleichung, welche für beliebige Werthe der Variabeln $\varkappa$ und λ Statt findet. Da diese Gleichung aber homogen und vom dritten Grade ist, so zerfällt sie in die gesuchten vier Bedingungsgleichungen, indem die Coefficienten der vier Potenzen und Producte der Variabeln einzeln verschwinden.

Die vier Bedingungen, dass die Oberfläche (7) $X = o$ das den beiden Oberflächen zweiter Ordnung $F = o$ und $\Psi = o$:

$$(10) \quad \ldots \quad \Psi = C_{00} u^2 + 2 C_{01} uv + C_{11} v^2 + \ldots . = o$$

gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühre, erhalten wir demnach auf gleiche Weise aus der dadurch veränderten Gleichung (9), dass man für den Buchstaben B den Buchstaben C setzt. Da jedoch durch diese Veränderung der Coefficient von $\varkappa^3$ in jener Gleichung ungeändert bleibt, so sieht man, dass von den vier neuen Bedingungsgleichungen eine mit einer der vier vorhin erwähnten zusammenfällt, dass also die 8 Bedingungen, welche die Oberfläche (7) $X = o$ zu erfüllen hat, wenn dieselbe sowohl das den Oberflächen $F = o$ und $\Phi = o$, als auch das den Oberflächen $F = o$ und $\Psi = o$ gemeinsame System harmonischer Polarebenen berühren soll, sich auf nur 7 Bedingungen reduciren.

Das Paradoxon, dass in dem vorliegenden Falle 7 Bedingungen hinreichen, damit eine Oberfläche zweiter Ordnung 8 bestimmte Ebenen berühre, findet seine Erklärung in dem Satze

der elften Vorlesung „dass alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 Ebenen berühren, auch noch eine durch diese 7 Ebenen bestimmte achte Ebene berühren." Aus dieser Erklärung schöpfen wir zugleich den Satz, der sich auch nach dem in der zwölften Vorlesung entwickelten Princip der Reciprocität aus dem entsprechenden Satze der vorhergehenden Vorlesung leicht ableiten lässt:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche 7 Ebenen aus zwei Systemen harmonischer Polarebenen ein und derselben Oberfläche zweiter Ordnung berühren, berühren auch die achte Ebene.

Der umgekehrte Satz findet gleichfalls Statt:

Acht Ebenen, welche drei Oberflächen zweiter Ordnung berühren, die von keinen Ebenen ausser diesen gemeinsam berührt werden, in zwei Gruppen von vier Ebenen zertheilt, bilden zwei Systeme harmonischer Polarebenen einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Denn stellt man die 12 Bedingungen auf, dass 8 Ebenen, in zwei Gruppen von 4 Ebenen, 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 zertheilt, zwei Systeme harmonischer Polarebenen ein und derselben Oberfläche zweiter Ordnung bilden, und betrachtet die Coordinaten der 7 Ebenen 1, 2 . . . 7 als gegeben, dagegen die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche und die Coordinaten der Ebene 0 als gesucht, so hat man 9 lineare und homogene Gleichungen zwischen den Coefficienten, wodurch sich die Verhältnisse derselben unzweideutig bestimmen, und, nachdem diese bestimmt sind, noch 3 lineare homogene Gleichungen zwischen den Coordinaten der Ebene 0. Diese letzteren bestimmen auf lineare Weise die Coordinaten der achten Ebene 0, welche mit den drei anderen Ebenen 1, 2, 3 das zweite System harmonischer Polarebenen der Oberfläche bildet, oder mit anderen Worten, sie bestimmen die Coordinaten der achten Ebene 0, welche alle Oberflächen zweiter Ordnung berührt, welche die 7 gegebenen Ebenen berühren.

Aus dem vorletzten Satze folgt ferner der Satz, dessen reciproker in der vorhergehenden Vorlesung bereits entwickelt worden ist:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung ein System harmonischer Polarebenen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung berührt, so berührt sie zugleich unendlich viele Systeme harmonischer Polarebenen der gegebenen Oberfläche.

Wenn drei Oberflächen zweiter Ordnung (1) und (10): $F = o$, $\Phi = o$, $\Psi = o$ gegeben sind, so sind mit ihnen zugleich auch drei Systeme harmonischer Polarebenen gegeben, von welchen jedes einem Oberflächenpaar zugehört. Von den 12 linearen Bedingungsgleichungen, welche die Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (7) $X = o$ zu erfüllen haben, wenn diese Oberfläche jene drei Systeme harmonischer Polarebenen gleichzeitig berühren soll, fallen nach dem Vorgehenden drei fort, weil sie doppelt vorkommen. Es reduciren sich demnach die 12 Bedingungsgleichungen auf 9, welchen die Coefficienten in der Gleichung (7) $X = o$ immer eindeutig genügen können. Man hat daher den Satz:

Drei Systeme harmonischer Polarebenen, von welchen jedes zweien von drei gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, werden von einer unzweideutig bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung berührt.

Die 9 verschiedenen Bedingungen zwischen den Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche (7) $X = o$, dass diese Oberfläche die drei Systeme harmonischer Polarebenen je zweier der drei gegebenen Oberflächen $F = o$, $\Phi = o$, $\Psi = o$ berühre, ergeben sich auf einfache Art aus folgender Betrachtung.

Es stellt unter der Voraussetzung, dass eine von den drei variabeln Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ gleich o sei, die Gleichung:

$$\varkappa F + \lambda \Phi + \mu \Psi = o$$

eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, welcher irgend eines von den drei Systemen harmonischer Polarebenen zugehört.

Um die Bedingung auszudrücken, dass die Oberfläche (7) $X = o$ durch ein System harmonischer Polarebenen jener Oberfläche hindurchgehe, übertragen wir jene Gleichung in Punktcoordinaten wie folgt:

$$(\mathrm{tt}) \ldots \begin{vmatrix} \varkappa A_{00}+\lambda B_{00}+\mu C_{00}, & \ldots & \varkappa A_{03}+\lambda B_{03}+\mu C_{03}, & x \\ \varkappa A_{10}+\lambda B_{10}+\mu C_{10}, & \ldots & \varkappa A_{13}+\lambda B_{13}+\mu C_{13}, & y \\ \varkappa A_{20}+\lambda B_{20}+\mu C_{20}, & \ldots & \varkappa A_{23}+\lambda B_{23}+\mu C_{23}, & z \\ \varkappa A_{30}+\lambda B_{30}+\mu C_{30}, & \ldots & \varkappa A_{33}+\lambda B_{33}+\mu C_{33}; & p \\ x, & \ldots & p, & o \end{vmatrix} = o,$$

entwickeln diese Gleichung nach Potenzen und Producten der variabeln Coordinaten, und setzen nach der zuletzt angegebenen Regel für:

$$xx, \quad xy, \quad yy, \ldots$$

respective: $\quad E_{00}, \quad E_{01}, \quad E_{11}, \ldots$

Die auf diese Weise geänderte Gleichung (tt) ist homogen und von der dritten Ordnung in Rücksicht auf die variabeln Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$. Da dieselbe nun für beliebige Werthe jener variabeln Grössen unter der Voraussetzung, dass eine, gleichviel welche, gleich o ist, erfüllt werden muss, wenn die Oberfläche $X = o$ jene drei Systeme harmonischer Polarebenen berührt, so müssen von den 10 Coefficienten in der Entwickelung der Gleichung nach Potenzen und Producten der variabeln Grössen alle verschwinden mit Ausnahme des zehnten Coefficienten, der mit dem Product $\varkappa\,\lambda\,\mu$ multiplicirt ist, welcher nicht zu verschwinden braucht, weil eben das Product selbst verschwindet.

Man erhält also die gesuchten 9 Bedingungen, wenn man jene 9 Coefficienten in der Entwickelung der auf die angegebene Weise geänderten Gleichung (tt) einzeln gleich o setzt.

Um aus den allgemeinen vorgetragenen Sätzen specielle Folgerungen für die Ebene zu machen, schicken wir einige Definitionen und Sätze aus der Geometrie der Ebene voraus.

Wenn der geometrische Ort des einem gegebenen Punkte zugeordneten harmonischen Poles einer Oberfläche zweiter Ordnung die Polarebene dieses Punktes ist, und man legt irgend eine Ebene durch den gegebenen Punkt, welche die Oberfläche, wie bekannt, in einem Kegelschnitt schneidet, so muss der geometrische Ort des dem gegebenen Punkte zugeordneten Poles in Bezug auf den Kegelschnitt eine gerade Linie sein, in welcher sich die Polarebene und die Ebene schneiden. Diese gerade Linie

nennt man die **Polare** des Punktes in Rücksicht auf den Kegelschnitt und den gegebenen Punkt den **Pol** der geraden Linie.

Zwei gerade Linien in der Ebene eines Kegelschnitts, von welchen jede durch den Pol der anderen geht, sind **harmonische Polaren** des Kegelschnittes.

Drei gerade Linien in der Ebene des Kegelschnittes, von welchen je zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes sind, bilden ein **System harmonischer Polaren** des Kegelschnitts. Sie schneiden sich also je zu zweien in drei Punkten, die ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes bilden. Man sieht hieraus ferner, dass die drei geraden Linien, welche ein System harmonischer Pole eines Kegelschnittes verbinden, ein System harmonischer Polaren des Kegelschnittes bilden.

Wir erinnern endlich an den Satz aus der vierzehnten Vorlesung, „dass 5 Tangentenebenen eines Kegels zweiter Ordnung den Kegel unzweideutig bestimmen, und dass jede 5 Ebenen, welche durch ein und denselben Punkt gehen, sich als Tangentenebenen eines ganz bestimmten Kegels zweiter Ordnung betrachten lassen.“ Woraus der Satz für die Ebene folgt, „**dass 5 Tangenten eines Kegelschnittes den Kegelschnitt unzweideutig bestimmen, und dass jede 5 gerade Linien in ein und derselben Ebene sich als die Tangenten eines ganz bestimmten Kegelschnittes betrachten lassen.**“

Mit diesen Daten ausgerüstet gehen wir an die Specialisirung der in dem Vorgehenden beschriebenen Figur.

Es lag eine beliebige Oberfläche zweiter Ordnung vor und zwei Systeme harmonischer Polarebenen 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 7 dieser Oberfläche. Von den letzteren wissen wir, dass jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche 7 derselben berührt, auch die achte Ebene berührt. Wir lassen die Ebenen 0 und 4 in ein und dieselbe Ebene E zusammenfallen, wodurch die 6 geraden Linien 01, 02, 03; 05, 06, 07 in jener Ebene zu liegen kommen. Die drei ersten bilden ein System harmonischer Polaren des Kegelschnittes, in welchem die Ebene E die gegebene Oberfläche schneidet. Die drei anderen bilden ebenfalls ein System harmonischer Polaren desselben Kegelschnittes. Wir beschreiben in der Ebene E einen zweiten Kegelschnitt K, welcher die 5 geraden Linien 01, 02, 03, 05, 06 berührt. Fassen wir diesen Kegelschnitt als Grenz-

fläche zweiter Ordnung auf, so ist derselbe eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche von den beiden Systemen harmonischer Polarebenen 7 Ebenen berührt. Sie berührt also auch die achte Ebene, das heisst, die gerade Linie 07 ist Tangente des beschriebenen Kegelschnitts *K*.

Löset man die in der Ebene *E* beschriebene Figur ab von der Raumfigur, so beweiset sie den Satz:

Irgend zwei Systeme harmonischer Polaren eines Kegelschnitts berühren einen Kegelschnitt.

Woraus folgt:

Wenn ein Kegelschnitt ein System harmonischer Polaren eines gegebenen Kegelschnitts berührt, so berührt derselbe Kegelschnitt unendlich viele Systeme harmonischer Polaren des gegebenen Kegelschnittes,

indem jede Tangente des ersten Kegelschnittes sich als eine harmonische Polare aus einem zweiten System harmonischer Polaren des gegebenen Kegelschnittes betrachten lässt, welches den ersten Kegelschnitt berührt.

Den umgekehrten Satz führen wir nur historisch an:

Irgend 6 Tangenten eines Kegelschnittes in zwei Gruppen von 3 Tangenten vertheilt, bilden zwei Systeme harmonischer Polaren eines Kegelschnittes.

Stellt man diese Sätze zusammen mit den reciproken der vorhergehenden Vorlesung, so ergiebt sich daraus folgender:

Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind, sind einem Kegelschnitt umbeschrieben; und zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt umbeschrieben sind, sind einem Kegelschnitt einbeschrieben.

Kehren wir zurück zu der zuletzt beschriebenen Raumfigur und beschreiben in ihr einen Kegel zweiter Ordnung, welcher durch die 5 Tangentenebenen 1, 2, 3, 5, 6, die sich mit der Ebene 7 in dem Pol *e* der Ebene *E* schneiden, unzweideutig bestimmt ist, so schneidet dieser Kegel die Ebene *E* in einem Kegelschnitt *K'*, der dieselben 5 Tangenten 01, 02, 03, 05, 06 hat, als der Kegelschnitt *K*. Es fallen daher diese beiden Kegelschnitte in einen zu-

sammen. Da aber die gerade Linie 07 eine Tangente des Kegelschnittes K ist, so ist die Ebene 7 eine Tangentenebene des beschriebenen Kegels. Daraus entspringt der Satz:

Wenn von zwei Systemen harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung eine Ebene des einen Systemes mit einer Ebene des anderen Systemes zusammenfällt, so berühren die 6 anderen Ebenen, welche durch den Pol der zusammenfallenden Ebenen gehen, einen Kegel zweiter Ordnung.

Rückt der Pol c in den Mittelpunkt der Oberfläche, so bilden die geraden Linien 12, 23, 31 ein System conjugirter Durchmesser der Oberfläche gleich wie die geraden Linien 56, 67, 75 ein zweites System conjugirter Durchmesser bilden. In diesem Falle lautet der angegebene Satz also:

Die drei Ebenen, welche durch je zwei conjugirte Durchmesser eines Systemes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung gehen und die drei Ebenen, welche durch je zwei conjugirte Durchmesser eines anderen Systemes derselben Oberfläche gehen, berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung drei Ebenen berührt, welche sich paarweise in drei conjugirten Durchmessern einer Oberfläche zweiter Ordnung schneiden, so berührt der Kegel unendlich viele Systeme von drei Ebenen, die sich paarweise in den conjugirten Durchmessern der Oberfläche schneiden.

Ist die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Kugel, so hat man den Satz:

Drei Ebenen, welche auf einander senkrecht stehen, und drei andere auf einander senkrecht stehende Ebenen, die sich in demselben Punkte als die drei ersten schneiden, berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Daraus folgt:

Wenn ein Kegel zweiter Ordnung ein System von drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen be-

rührt, so berührt er unendlich viele Systeme von drei Ebenen, die auf einander senkrecht stehen.

Wir schliessen diese Vorlesung mit der Bemerkung, dass das Problem der vier Grenzflächen zweiter Ordnung, welche von allen Ebenen berührt werden, die gleichzeitig zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung $F = o$ und $\Phi = o$ berühren, von welchem Problem unsere Untersuchungen ausgingen, sich als ein rein algebraisches auffassen lässt, nämlich:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen:

$$u = u_0 U + u_1 V + u_2 W + u_3 R,$$
$$v = v_0 U + v_1 V + v_2 W + v_3 R,$$
$$w = w_0 U + w_1 V + w_2 W + w_3 R,$$
$$r = r_0 U + r_1 V + r_2 W + r_3 R,$$

welche zwei gegebene homogene Functionen F und Φ der Variabeln u, v, w, r der zweiten Ordnung transformiren in die Form:

$$F = \frac{U^2}{\mu_0} + \frac{V^2}{\mu_1} + \frac{W^2}{\mu_2} + \frac{R^2}{\mu_3},$$

$$\Phi = \frac{U^2}{\nu_0} + \frac{V^2}{\nu_1} + \frac{W^2}{\nu_2} + \frac{R^2}{\nu_3}.$$

Denn drückt man die Bedingungen des Problems aus, so erhält man die Gleichungen (5), welche die Ebenen der vier Grenzflächen bestimmen.

Dieses Problem in weiterer Ausdehnung wird, wie bereits angedeutet worden, den Gegenstand der folgenden Vorlesung bilden.

Achtzehnte Vorlesung.

Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung durch lineare homogene Substitutionen.

Geometrische Probleme haben in den beiden letzten Vorlesungen auf ein und dasselbe algebraische Problem geführt der Transformation homogener Functionen der zweiten Ordnung durch lineare Substitutionen. Wir werden gegenwärtig das algebraische Problem wieder aufnehmen, indem wir die Zahl der Variabeln unbeschränkt lassen.

In dieser Absicht werden wir damit beginnen, Relationen zu entwickeln, welche zwischen den Coefficienten linearer Substitutionen überhaupt auftreten. Wir werden zweitens auf Eigenschaften linearer Substitutionen aufmerksam machen, welche eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung transformiren in einen Ausdruck, der nur die Quadrate der neuen Variabeln enthält. Wir werden drittens die linearen Substitutionen bestimmen, welche zwei gegebene homogene Functionen der zweiten Ordnung auf die Quadrate der neuen Variabeln zurückführen.

Es stelle:

$$(1) \;\ldots\ldots\; X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \ldots\ldots a_n^\varkappa x_n$$

ein System von $n+1$ linearen Gleichungen vor, indem $\varkappa$ die Werthe habe $0, 1, \ldots n$. Durch Auflösung dieses Systemes Gleichungen nach den $n+1$ Variabeln x erhält man, wie man in (17) und (21) der siebenten Vorlesung gesehen, Gleichungen von derselben Form rücksichtlich der Variabeln X:

$$(2) \;\ldots\ldots\; x_\varkappa = e_\varkappa^0 X_0 + e_\varkappa^1 X_1 + \ldots\ldots e_\varkappa^n X_n.$$

Mit diesen linearen Substitutionen bringen wir in Verbindung ein zweites System linearer Substitutionen von der Form:

$$(3) \;\ldots\ldots\; Y_\varkappa = e_0^\varkappa y_0 + e_1^\varkappa y_1 + \ldots\ldots e_n^\varkappa y_n,$$

aus welchen nach (22) und (18) der siebenten Vorlesung folgende Auflösungen hervorgehen:

$$(4) \;\ldots\ldots\; y_\varkappa = a_\varkappa^0\, Y_0 + a_\varkappa^1\, Y_1 + \ldots\ldots a_\varkappa^n\, Y_n.$$

Zwischen den Coefficienten a und e in diesen Substitutionen müssen, weil die einen die anderen bedingen, mannichfaltige Relationen Statt finden. Von diesen Relationen werden wir die gebräuchlichsten entwickeln.

Setzt man die Ausdrücke (1) und (3) in (2) und (4) und vergleicht die Coefficienten gleicher Variabeln, so erhält man:

$$(5) \;\ldots\ldots\; \begin{cases} 0 = e_\varkappa^0\, a_\lambda^0 + e_\varkappa^1\, a_\lambda^1 + \ldots\ldots e_\varkappa^n\, a_\lambda^n. \\ 1 = e_\varkappa^0\, a_\varkappa^0 + e_\varkappa^1\, a_\varkappa^1 + \ldots\ldots e_\varkappa^n\, a_\varkappa^n. \\ 0 = e_0^\varkappa\, a_0^\lambda + e_1^\varkappa\, a_1^\lambda + \ldots\ldots e_n^\varkappa\, a_n^\lambda, \\ 1 = e_0^\varkappa\, a_0^\varkappa + e_1^\varkappa\, a_1^\varkappa + \ldots\ldots e_n^\varkappa\, a_n^\varkappa. \end{cases}$$

Multiplicirt man die beiden Determinanten:

$$(6) \;.\;.\; A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} e_0^0, & e_1^0, & \ldots & e_n^0 \\ e_0^1, & e_1^1, & \ldots & e_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_0^n, & e_1^n, & \ldots & e_n^n \end{vmatrix}$$

mit einander und stellt das Product nach (31) der siebenten Vorlesung als eine Determinante dar, so erhält man mit Rücksicht auf (5):

$$A\,E = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

eine Determinante, welche mit Rücksicht auf (14) der siebenten Vorlesung sich auf die Einheit reducirt, so dass man hat:

$$(7) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; A\,E = 1.$$

Man hat ferner die Gleichung:

$$(8) \;\ldots\ldots\; X_0\, Y_0 + X_1\, Y_1 + \ldots X_n\, Y_n = x_0 y_0 + x\, y_1 + \ldots x_n y_n.$$

welche durch die Substitutionen (1) und (3) oder (2) und (4) eine identische wird. Denn macht man die genannten Substitutionen und vergleicht beide Seiten der Gleichung mit einander, so erhält man die Gleichungen (5).

Diese Gleichung (8) bleibt auch eine durch die Substitutionen identische, wenn man sowohl ihre linke als ihre rechte Seite zur $(n+1)$ten Potenz erhebt. Hierdurch erhält man mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes:

$$\sum \frac{\Pi_{(n+1)}}{C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}} (X_0\,Y_0)^{\alpha_0} (X_1\,Y_1)^{\alpha_1} \ldots (X_n\,Y_n)^{\alpha_n}$$

$$= \sum \frac{\Pi_{(n+1)}}{C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}} (x_0\,y_0)^{\alpha_0} (x_1\,y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n\,y_n)^{\alpha_n},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(9) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \Pi(n+1) &= 1\,.\,2\ldots\ldots(n+1) \\ C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n} &= \Pi(\alpha_0)\,\Pi(\alpha_1)\ldots\ldots\Pi(\alpha_n) \end{aligned}$$

und annimmt, dass $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ alle gleichen und ungleichen Zahlen $0, 1, 2 \ldots (n+1)$ bedeuten, deren Summe ist:

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots\ldots \alpha_n = (n+1).$$

Mit Unterdrückung des Factors $\Pi(n+1)$ eines jeden Gliedes der genannten Gleichung und Aenderung der Factorenfolge lässt sich dieselbe bequemer so darstellen:

$$(11) \ldots \quad \begin{aligned} &\sum \frac{1}{C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}\,.\,Y_0^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_n^{\alpha_n} \\ = &\sum \frac{1}{C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\,.\,y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots\ldots y_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

In der Entwickelung des Productes:

$$y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}$$

nach den Variabeln Y werden wir den Coefficienten des Productes $Y_0\,Y_1 \ldots Y_n$ bezeichnen mit:

$$C_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}\,.\,A_{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_n}\,.$$

Ebenso werden wir in der Entwickelung des Productes:

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

nach den Variabeln X den Coëfficienten des Productes $X_0 X_1 \dots X_n$ bezeichnen mit:

$$C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n},$$

wodurch die Grössen $A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ als Functionen der Substitutionscoëfficienten a, und die Grössen $E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ als Functionen der Substitutionscoëfficienten e vollständig definirt sind.

Denkt man sich nun die Gleichung (11) nach Potenzen der Variabeln Y entwickelt, so wird der Coefficient des Productes $Y_0 Y_1 \dots Y_n$ in dem linken Theile der Gleichung, da $C_{11\dots1} = 1$ ist, gerade das Product:

$$X_0 X_1 \dots X_n.$$

Um den entsprechenden Coefficienten des rechten Theiles der Gleichung zu erhalten, wird man in dem rechten Theile der Gleichung für das Product $y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$ zu setzen haben $C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$, wodurch man erhält:

$$\Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Da aber die genannten beiden Coefficienten in der Gleichung (11) einander gleich sein müssen, so hat man:

$$(12) \quad \dots X_0 X_1 \dots X_n = \Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

In gleicher Weise erhält man aus (11) durch Entwickelung nach den Variabeln X:

$$(13) \quad \dots Y_0 Y_1 \dots Y_n = \Sigma E_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}.$$

Man kann hiernach die vorausgeschickte Definition der Grössen A und E aufgeben, und sie als Entwickelungscoëfficienten durch die Gleichungen (12) und (13) definiren, wobei es sich auf das Deutlichste herausstellt, dass die einen aus den anderen hervorgehen durch Vertauschung der Buchstaben a und e, weshalb gerade die eingeführte Bezeichnung gewählt worden ist. Behält man aber die erste Definition der Grössen A und E bei, ent-

wickelt die Gleichung (12) nach Potenzen und Producten der Variabeln X, und setzt in der Entwickelung die Coefficienten des Productes $X_0\, X_1 \dots X_n$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man:

$$(14) \quad \dots \quad 1 = \Sigma\, C_{\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot A_{\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_n},$$

welche Gleichung man auch erhalten haben würde, wenn man (11) nach den Variabeln X und Y entwickelte und die Coefficienten des Productes $X_0\, X_1 \dots X_n \,.\, Y_0\, Y_1 \dots Y_n$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzte.

Dieses Resultat fassen wir zusammen wie folgt:

Wenn die in (1) und (3) gebildeten Substitutionen das Product sämmtlicher Variabeln X und das Product sämmtlicher Variabeln Y transformiren in (12) und (13), so findet unter der Bezeichnung (9) die Gleichung (14) Statt.

Im Falle $n = 2$ wird die Gleichung (14):

$$
\begin{aligned}
(15) \quad \dots \quad 1 = \; & 6\, A_{300}\, E_{300} + 6\, A_{030}\, E_{030} + 6\, A_{003}\, E_{003} \\
& + 2\, A_{120}\, E_{120} + 2\, A_{012}\, E_{012} + 2\, A_{201}\, E_{201} \\
& + 2\, A_{102}\, E_{102} + 2\, A_{210}\, E_{210} + 2\, A_{021}\, E_{021} \\
& + \; A_{111}\, E_{111},
\end{aligned}
$$

indem die Grössen A die Werthe haben:

$$A_{300} = a_0^0\, a_0^1\, a_0^2, \quad A_{030} = a_1^0\, a_1^1 . a_1^2, \quad A_{003} = a_2^0\, a_2^1\, a_2^2,$$

$$
(15)^* \dots \quad
\begin{aligned}
A_{120} &= a_0^0\, a_1^1\, a_1^2 + a_0^1\, a_1^2\, a_1^0 + a_0^2\, a_1^0\, a_1^1, \\
A_{102} &= a_0^0\, a_2^1\, a_2^2 + a_0^1\, a_2^2\, a_2^0 + a_0^2\, a_2^0\, a_2^1, \\
A_{012} &= a_1^0\, a_2^1\, a_2^2 + a_1^1\, a_2^2\, a_2^0 + a_1^2\, a_2^0\, a_2^1, \\
A_{210} &= a_1^0\, a_0^1\, a_0^2 + a_1^1\, a_0^2\, a_0^0 + a_1^2\, a_0^0\, a_0^1, \\
A_{201} &= a_2^0\, a_0^1\, a_0^2 + a_2^1\, a_0^2\, a_0^0 + a_2^2\, a_0^0\, a_0^1, \\
A_{021} &= a_2^0\, a_1^1\, a_1^2 + a_2^1\, a_1^2\, a_1^0 + a_2^2\, a_1^0\, a_1^1,
\end{aligned}
$$

$$A_{111} = a_0^0 a_1^1 a_2^2 + a_0^0 a_1^2 a_2^1 + a_0^1 a_1^2 a_2^0 + a_0^1 a_1^0 a_2^2 + a_0^2 a_1^0 a_2^1 + a_0^2 a_1^1 a_2^0,$$

woraus die entsprechenden Grössen E hevorgehen, wenn man den Buchstaben a in e verwandelt.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn die Substitutionscoefficienten a den entsprechenden e gleich sind, in welchem Falle auch die Grössen A den entsprechenden E gleich werden. Denn in dieser Voraussetzung zerlegt sich nach (14) die Einheit in die Summe von Quadraten.

Die Substitutionen (1) waren bisher ganz willkürliche, denn die Substitutionscoefficienten a konnten irgend welche Werthe haben. Die Substitutionscoefficienten e in den aufgelösten Gleichungen (2) waren durch sie bestimmt. Man kann aber auch die Substitutionscoefficienten e in (2) als die willkürlichen betrachten und die Substitutionscoefficienten a als bestimmte Functionen der ersteren.

Diese Willkürlichkeit werden wir fortan beschränken, indem wir festsetzen, dass die Substitutionen (2) eine beliebig gegebene homogene Function $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ der zweiten Ordnung transformire in die Form:

$$(16) \quad \ldots \quad f(x_0, x_1, \ldots \ldots x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \ldots \mu_n X_n^2.$$

Dass die $(n+1)^2$ Substitutionscoefficienten e sich wirklich so bestimmen lassen, dass durch Einsetzung der Werthe von $x_0, x_1, \ldots x_n$ aus (2) die Gleichung (16) eine identische wird, ist leicht ersichtlich. Denn setzt man nach der Substitution die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man nur $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den $(n+1)(n+2)$ unbekannten Grössen e und μ, wodurch diese Grössen nicht bestimmt sind. Man kann daher unendlich viele Substitutionen (2) bilden, welche der gemachten Forderung genügen, selbst wenn man die $(n+1)$ Grössen μ als gegeben betrachtet.

Dieselben $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Bedingungsgleichungen in einer anderen Form erhält man auch, wenn man die Substitutionen (1) in (16) macht und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Denn in diesem Falle wird die Gleichung (16) eine identische in Rück-

sicht auf die Variabeln x, wie dieselbe Gleichung durch die Substitutionen (2) eine identische Gleichung wurde in Rücksicht auf die Variabeln X.

Denkt man sich nun diese Gleichung (16) durch die Substitutionen (1) zu einer identischen gemacht und differenzirt nach $x_\varkappa$, so erhält man:

$$(17) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = a_\varkappa{}^0 \mu_0 X_0 + a_\varkappa{}^1 \mu_1 X_1 + \ldots . a_\varkappa{}^n \mu_n X_n$$

eine Gleichung, welche, da $\varkappa$ die Werthe hat $0, 1, 2 \ldots n$, ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen repräsentirt.

Diese Gleichungen sind als eine Folge der Substitutionen (1) oder (2) zu betrachten, welche die Eigenschaft haben, die Transformation (16) zu vollführen, und umgekehrt sind auch die Gleichungen (1) oder (2) eine Folge dieser Gleichungen. An Stelle der Relationen (1) oder (2) zwischen den Variabeln x und X, welche die Gleichung (16) zu einer identischen machen, kann man daher auch die Gleichungen (17) nehmen.

Die Gleichungen (17) gehen über in (4), wenn man die Vertauschungen macht:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) \text{ mit } y_\varkappa \text{ und } \mu_\varkappa X_\varkappa \text{ mit } Y_\varkappa.$$

und die Substitutionen (4) gehen über in (17). Da aber die Gleichungen (17) nichts anderes sind als die umgestalteten Substitutionen (1), so kann man sagen, dass durch die angegebenen Vertauschungen die Substitutionen (1) und (4), also auch (2) und (3) in einander übergehen.

Alle bisher aufgestellten Gleichungen sind unmittelbare Folgen aus den Substitutionen. Man wird daher in allen jenen Gleichungen die angegebenen Vertauschungen machen können, sie müssen jedoch gleichzeitig erfolgen.

Die erste von diesen Vertauschungen besteht darin, dass man setzt:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_\varkappa) = y_\varkappa.$$

Löset man das durch diese Gleichung repräsentirte System Gleichungen auf, so erhält man nach (28) der siebenten Vorlesung, indem die Unbekannte $2x_\varkappa$ sich als den Differentialquotienten einer bestimmten homogenen Function $F(y_0, y_1, \ldots y_n)$ der zweiten Ord-

nung, der reciproken Function von $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$, darstellt, Gleichungen von der Form:

$$x_\varkappa = \tfrac{1}{2} F'(y_\varkappa).$$

Es ist hiernach gleichbedeutend, ob man setzt:

$$\tfrac{1}{2} f'(x_\varkappa) = y_\varkappa \quad \text{oder} \quad x_\varkappa = \tfrac{1}{2} F'(y_\varkappa).$$

Wir können daher sagen, dass es erlaubt sei, in allen unseren Gleichungen folgende Vertauschungen zu machen:

$$(18) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2} f'(x_\varkappa) = y_\varkappa \ \text{oder}\ \tfrac{1}{2} F'(y_\varkappa) = x_\varkappa, \ \text{und}\ \mu_\varkappa X_\varkappa = Y_\varkappa.$$

Macht man diese Vertauschungen aber in der also dargestellten Gleichung (16):

$$x_0 \tfrac{1}{2} f'(x_0) + x_1 \tfrac{1}{2} f'(x_1) + \ldots x_n \tfrac{1}{2} f'(x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2,$$

so erhält man:

$$(19) \quad \ldots \quad F(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\mu_n}.$$

Dieses Resultat geben wir als einen Lehrsatz wieder wie folgt:

Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogene Function $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ der zweiten Ordnung transformiren in:

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2,$$

so transformiren die Substitutionen (3) und (4) die reciproke Function $F(y_0, y_1, \ldots y_n)$ in:

$$F(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\mu_n}.$$

Eine ganz besondere Beachtung verdient der Fall, wenn die gegebene Function ist: $f(x_0, x_1, \ldots x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2$ und zugleich $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 1$. Denn unter dieser Voraussetzung nimmt die Gleichung (17) die Gestalt an:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \ldots a_\varkappa^n X_n.$$

Vergleicht man letztere mit den Substitutionen (2), so sieht man, dass:

$$c_\varkappa^\lambda = a_\varkappa^\lambda.$$

Diese Bemerkung drücken wir als Satz aus:

Wenn die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \dots a_\varkappa^n X_n$$

den Ausdruck:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2$$

transformiren in:

$$X_0^2 + X_1^2 + \dots X_n^2,$$

so sind die Auflösungen der Substitutionen folgende:

$$X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \dots a_n^\varkappa x_n.$$

In diesem Falle unterscheiden sich die Substitutionen (1), (2) von (3), (4) nur durch die Bezeichnung der Variabeln und wenn das letztere zutrifft, kann man die Gleichung (8) übergehen lassen in:

$$X_0^2 + X_1^2 + \dots X_n^2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2,$$

indem man $X_\varkappa = Y_\varkappa$ und $x_\varkappa = y_\varkappa$ setzt. Daher kann man den Satz auch umkehren wie folgt:

Wenn die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_\varkappa^0 X_0 + a_\varkappa^1 X_1 + \dots a_\varkappa^n X_n$$

aufgelöset von der Form sind:

$$X_\varkappa = a_0^\varkappa x_0 + a_1^\varkappa x_1 + \dots a_n^\varkappa x_n,$$

so machen sie die Gleichung:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2 = X_0^2 + X_1^2 + \dots X_n^2$$

zu einer identischen Gleichung.

Die Coefficienten in den Substitutionen (1), (2), welche die Transformation (16) bewirken, haben, wenn $n = 3$ ist, eine bestimmte geometrische Bedeutung, auf welche wir hier aufmerksam machen wollen.

Macht man nämlich die Substitutionen (2) in (16) und vergleicht beide Seiten der Gleichung, so erhält man:

$$e_0^p f'(e_0^q) + e_1^p f'(e_1^q) + \dots e_3^p f'(e_3^q) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass $e_0^p, e_1^p, e_2^p, e_3^p$ und $e_0^q, e_1^q, e_2^q, e_3^q$ die homogenen Coordinaten eines Polenpaares sind rücksichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch homogene Punktcoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 analytisch ausgedrückt sich also darstellt:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Es sind daher die 16 Coefficienten e in den Substitutionen (2) die Coordinaten eines Systems harmonischer Pole der genannten Oberfläche.

In gleicher Art erweisen sich aus (19) die 16 Substitutionscoefficienten a in (4) als die homogenen Coordinaten eines Systemes harmonischer Polarebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch Ebenencoordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 ausgedrückt sich also darstellt:

$$F(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Die genannten beiden Oberflächen zweiter Ordnung erweisen sich aber nach der doppelten Darstellungsweise der Oberfläche zweiter Ordnung durch Punktcoordinaten oder durch Ebenencoordinaten als ein und dieselbe Oberfläche, und aus der geometrischen Deutung der Gleichungen (5) im Falle $n = 3$ entnehmen wir den Beweis, dass das System harmonischer Polarebenen gerade das System von 4 Ebenen ist, welche je drei harmonische Pole aus dem genannten System harmonischer Pole der Oberfläche verbinden.

Die geometrische Deutung der Substitutionen selbst im Falle $n = 3$ behalten wir der nächstfolgenden Vorlesung vor.

Da die $(n+1)^2$ Coefficienten in den Substitutionen (1) oder (2), welche den Ausdruck (16) transformiren, noch eine grosse Willkürlichkeit zulassen, so werden wir fortan annehmen, dass diese Substitutionen zwei gegebene homogene Functionen zweiter Ordnung $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(X_0, X_1, \ldots X_n)$ transformiren in:

$$(20) \quad \ldots \quad \begin{aligned} f(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2, \\ \varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) &= \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots \nu_n X_n^2. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Annahme nichts Unmögliches enthält. Denn macht man in (20) die Substitutionen (2) und vergleicht beide Seiten der Gleichungen, so erhält man $(n+1)(n+2)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $(n+1)^2$ zu bestimmenden Substitutionscoefficienten e und den $2(n+1)$ ferneren Unbekannten μ und ν. Man hat also $(n+1)$ Unbekannte mehr als Bedingungsgleichungen. Daraus ist ersichtlich, dass von den $(n+1)(n+3)$ Unbekannten $(n+1)$ beliebige Werthe annehmen können, während die übrigen durch sie bestimmt sind. Welchen $(n+1)$ Unbekannten beliebige Werthe zuertheilt werden können, und wie die Werthe der übrigen sich daraus bestimmen lassen, werden wir zum Schlusse der Untersuchung auseinandersetzen. Gegenwärtig werden wir weitere Folgerungen aus unserer Annahme ziehen.

Wenn wir die zweite Gleichung (20) als eine durch die Substitutionen (1) identische Gleichung betrachten und nach $x_\varkappa$ differenziren, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = a_\varkappa^0 \nu_0 X_0 + a_\varkappa^1 \nu_1 X_1 + \ldots a_\varkappa^n \nu_n X_n,$$

eine Gleichung, welche in (4) übergeht und welche wieder aus (4) hervorgeht, wenn man die Vertauschungen macht:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) \text{ mit } y_\varkappa \text{ und } \nu_\varkappa X_\varkappa \text{ mit } Y_\varkappa.$$

Durch diese Vertauschungen gehen die Substitutionen (1) und (4) in einander über, gerade so wie dieses auch durch die Vertauschungen (18) geschah. Da aber alle bis dahin aufgestellten Gleichungen Folgen sind der Substitutionen (1) bis (4), welche den Gleichungen (20) identisch genügen und diese Gleichungen selbst als Folgen aus den so definirten Substitutionen zu betrachten sind, so kann man in allen bisher aufgestellten Gleichungen diese Vertauschungen machen.

Die erste Vertauschung geschieht, indem man setzt:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa.$$

Durch Auflösung dieses Systemes Gleichungen nach den Variabeln x erhält man, wenn man mit $\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n)$ die reciproke Function von $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ bezeichnet:

$$x_\varkappa = \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa).$$

Es ist daher gleichbedeutend ob man setzt:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } x_\varkappa = \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa).$$

Hiernach ist es erlaubt, in allen unseren Gleichungen folgende Vertauschungen zu machen:

$$(21) \ldots \tfrac{1}{2}\varphi'(x_\varkappa) = y_\varkappa \text{ oder } \tfrac{1}{2}\Phi'(y_\varkappa) = x_\varkappa, \text{ und } \nu_\varkappa X_\varkappa = Y_\varkappa.$$

Macht man diese Vertauschung in der zweiten also dargestellten Gleichung (20):

$$x_0 \tfrac{1}{2}\varphi'(x_0) + x_1 \tfrac{1}{2}\varphi'(x_1) + \ldots x_n \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n) = \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots \nu_n X_n^2,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(22) \ldots \Phi(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\nu_0} + \frac{Y_1^2}{\nu^1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\nu_n}.$$

Die Bedingungen dieser Gleichung (22) und der Gleichung (19) fassen wir in dem folgenden Satze zusammen:

Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogenen Functionen $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ der zweiten Ordnung transformiren in:

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots \mu_n X_n^2,$$

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) = \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots \nu_n X_n^2,$$

so transformiren die Substitutionen (3) und (4) die reciproken Functionen $F(y_0, y_1, \ldots y_n)$ und $\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n)$ in:

$$F(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\mu_n},$$

$$\Phi(y_0, y_1, \ldots y_n) = \frac{Y_0^2}{\nu_0} + \frac{Y_1^2}{\nu_1} + \ldots \frac{Y_n^2}{\nu_n}.$$

Wir haben in dem Vorhergehenden zwei Hülfsmittel geschaffen, um aus einer beliebigen Gleichung, die durch die Substitutionen (1) bis (4), welche die Transformationen (20) bewirken, eine identische wird, neue Gleichungen abzuleiten, nämlich die Vertauschungen (18) oder (21). Da die auf diese Weise abgeleiteten Gleichungen wieder durch die Substitutionen identische Gleichungen werden, so sind wir in der Lage die vorhandenen Gleichungen in das Unbegrenzte zu vervielfältigen.

Macht man zum Beispiel in der Gleichung (22) die Vertauschung (18) und in der Gleichung (19) die Vertauschung (21) und setzt der Kürze wegen:

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \lambda_\varkappa,$$

so erhält man mit Einführung der neuen Bezeichnungen f_{+1} und φ_{-1}:

$$(24) \quad \ldots \quad \begin{aligned} f_{+1} &= \Phi\left(\tfrac{1}{2}f'(x_0),\ \tfrac{1}{2}f'(x_1),\ \ldots\ \tfrac{1}{2}f'(x_n)\right) \\ &= \mu_0\lambda_0 X_0^2 + \mu_1\lambda_1 X_1^2 + \ldots\ \mu_n\lambda_n X_n^2, \\ \varphi_{-1} &= F\left(\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0),\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_1),\ \ldots\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)\right) \\ &= \nu_0\frac{1}{\lambda_0}X_0^2 + \nu_1\frac{1}{\lambda_1}X_1^2 + \ldots\ \nu_n\frac{1}{\lambda_n}X_n^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen den Satz:

Wenn die Substitutionen (1) und (2) die homogenen Functionen zweiter Ordnung $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ und $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n)$ transformiren in die Form:

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots\ \mu_n X_n^2,$$

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots x_n) = \nu_0 X_0^2 + \nu_1 X_1^2 + \ldots\ \nu_n X_n^2,$$

so transformiren dieselben Substitutionen die homogenen Functionen zweiter Ordnung:

$$\Phi\left(\tfrac{1}{2}f'(x_0),\ \tfrac{1}{2}f'(x_1), \ldots\ \tfrac{1}{2}f'(x_n)\right) = f_{+1} \text{ und}$$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0),\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_1), \ldots\ \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)\right) = \varphi_{-1} \text{ in:}$$

$$f_{+1} = \mu_0\lambda_0 X_0^2 + \mu_1\lambda_1 X_1^2 + \ldots\ \mu_n\lambda_n X_n^2,$$

$$\varphi_{-1} = \nu_0\frac{1}{\lambda_0}X_0^2 + \nu_1\frac{1}{\lambda_1}X_1^2 + \ldots\ \nu_n\frac{1}{\lambda_n}X_n^2.$$

Dieser Satz ist die Quelle zur Herleitung einer unbegrenzten Zahl von Gleichungen, welche durch die Substitutionen (1) und (2) zu identischen Gleichungen werden. Denn wir haben vier homogene Functionen $f, \varphi, f_{+1}, \varphi_{-1}$ der zweiten Ordnung, von welchen je zwei den Bedingungen des Satzes genügen. Es lassen sich demnach aus je zwei derselben zwei neue homogene Functionen zweiter Ordnung herleiten, die durch die Substitutionen (2) nur auf die Quadrate der neuen Variabeln X zurückführen. Diese neuen Functionen genügen aber wieder den Bedingungen des Sa-

tzes und können zur Herleitung neuer homogener Functionen zweiter Ordnung von gleicher Eigenschaft dienen.

Auf diese Weise sehen wir aus den beiden gegebenen Functionen (20) f und φ andere homogene Functionen zweiter Ordnung von den Variabeln x, f_p und φ_p, hervorgehen, welche durch die Substitutionen (2) die Gestalt erhalten:

$$(25)\ \ldots \quad \begin{aligned} f_p &= \mu_0 \lambda_0^p X_0^2 + \mu_1 \lambda_1^p X_1^2 + \ldots \mu_n \lambda_n^p X_n^2, \\ \varphi_p &= \nu_0 \lambda_0^p X_0^2 + \nu_1 \lambda_1^p X_1^2 + \ldots \nu_n \lambda_n^p X_n^2, \end{aligned}$$

wo p irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Alle diese Functionen sind rational in Rücksicht auf die Coefficienten in den gegebenen beiden Functionen f und φ, aus welchen sie hervorgegangen sind.

Durch die Vertauschungen (18) und (21) gehen aus den homogenen Functionen (25) die homogenen F_p und Φ_p der zweiten Ordnung rücksichtlich der Variabeln y hervor, die durch die Substitutionen (4) die Gestalt erhalten:

$$(26)\ \ldots \quad \begin{aligned} F_p &= \lambda_0^p \frac{Y_0^2}{\mu_0} + \lambda_1^p \frac{Y_1^2}{\mu_1} + \ldots \lambda_n^p \frac{Y_n^2}{\mu_n}, \\ \Phi_p &= \lambda_0^p \frac{Y_0^2}{\nu_0} + \lambda_1^p \frac{Y_1^2}{\nu_1} + \ldots \lambda_n^p \frac{Y_n^2}{\nu_n}, \end{aligned}$$

und welche ebenfalls rational aus den Coefficienten der gegebenen Functionen f und φ zusammengesetzt sind.

Um noch andere merkwürdige Relationen herzuleiten, differenziren wir, indem wir uns die vorhergehenden Gleichungen durch die Substitutionen (1) und (3) zu identischen Gleichungen gemacht denken, die erste Gleichung (25) nach $x_\varkappa$ und die erste Gleichung (26) nach $y_\varkappa$, wodurch wir erhalten:

$$(27)\ \ldots \quad \tfrac{1}{2} f_p'(x_\varkappa) = a_\varkappa^0 \mu_0 \lambda_0^p X_0 + a_\varkappa^1 \mu_1 \lambda_1^p X_1 + \ldots a_\varkappa^n \mu_n \lambda_n^p X_n.$$

$$(28)\ \ldots \quad \tfrac{1}{2} F_p'(y_\varkappa) = c_\varkappa^0 \frac{\lambda_0^p}{\mu_0} Y_0 + c_\varkappa^1 \frac{\lambda_1^p}{\mu_1} Y_1 + \ldots c_\varkappa^n \frac{\lambda_n^p}{\mu_n} Y_n.$$

Wir bilden ferner die Determinanten $[a]$ vom $(n+1)$ten Grade rücksichtlich der Variabeln x:

$$(29)\ \ldots \quad [a] = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} f'(x_0), & \tfrac{1}{2} f'(x_1), & \ldots & \tfrac{1}{2} f'(x_n) \\ \tfrac{1}{2} f_1'(x_0), & \tfrac{1}{2} f_1'(x_1), & \ldots & \tfrac{1}{2} f_1'(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tfrac{1}{2} f_n'(x_0), & \tfrac{1}{2} f_n'(x_1), & \ldots & \tfrac{1}{2} f_n'(x_n) \end{vmatrix}.$$

Durch Einsetzen der Werthe (27) der Componenten zerfällt diese Determinante nach (31) der siebenten Vorlesung in das Product zweier Determinanten, von welchen die eine unter (6) mit A bezeichnet worden ist. Der andere Factor ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 \lambda_0^0 X_0, & \mu_1 \lambda_1^0 X_1, & \dots & \mu_n \lambda_n^0 X_n \\ \mu_0 \lambda_0^1 X_0, & \mu_1 \lambda_1^1 X_1, & \dots & \mu_n \lambda_n^1 X_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_0 \lambda_0^n X_0, & \mu_1 \lambda_1^n X_1, & \dots & \mu_n \lambda_n^n X_n \end{vmatrix}.$$

Aber diese Determinante ist nach (29) der siebenten Vorlesung wieder das Product zweier Factoren, von welchen der eine Factor ist:

$$\mu_0 \mu_1 \dots \mu_n X_0 X_1 \dots X_n$$

und der andere Factor die Determinante L:

$$L = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \dots & \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^n, & \lambda_1^n, & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}.$$

Erinnert man sich der Bildungsweise der Determinante L zu Anfang der siebenten Vorlesung aus der Entwickelung des Products der Differenzen:

$$(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

und bemerkt, dass in der Determinante L die oberen Indices der Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n$ wirkliche Exponenten bedeuten, so sieht man, dass jene Determinante eben jenem Producte gleich ist, weshalb man hat:

$$(30) \quad \dots \dots L = (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

Hiernach ist:

$$(31) \quad \dots \dots [a] = \mu_0 \mu_1 \dots \mu_n X_0 X_1 \dots X_n . A . L.$$

Bildet man in gleicher Weise die Determinante $[c]$:

$$(32) \quad \ldots \quad [e] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}F'(y_0), & \frac{1}{2}F'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F'(y_n) \\ \frac{1}{2}F_1'(y_0), & \frac{1}{2}F_1'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F_1'(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}F_n'(y_0), & \frac{1}{2}F_n'(y_1), & \ldots & \frac{1}{2}F_n'(y_n) \end{vmatrix},$$

und setzt die Werthe (28) der Componenten ein, so erhält man nach analogen Reductionen:

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [e] = \frac{Y_0\, Y_1 \ldots Y_n}{\mu_0\, \mu_1 \ldots \mu_n} \cdot E \cdot L.$$

Setzt man endlich um abzukürzen:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad M = \mu_0\, \mu_1 \ldots \mu_n,$$

so kann man die Gleichungen (31) und (33) also darstellen:

$$(35) \quad \ldots \quad \begin{aligned} X_0\, X_1 \ldots X_n &= \frac{[a]}{M \cdot A \cdot L}, \\ Y_0\, Y_1 \ldots Y_n &= \frac{M \cdot [e]}{E \cdot L}. \end{aligned}$$

Es seien nun die Entwickelungen der in (29) und (32) definirten Determinanten $[a]$ und $[e]$ nach Potenzen und Producten der Variabeln in denselben:

$$(36) \quad \ldots \quad \begin{aligned} [a] &= \Sigma a_{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n} \cdot x_0^{\alpha_0}\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\ [e] &= \Sigma e_{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n} \cdot y_0^{\alpha_0}\, y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

woselbst die Grössen a und e rationale Functionen der Coefficienten in den gegebenen Functionen f und φ darstellen. Setzt man diese Ausdrücke von $[a]$ und $[e]$ in (35) ein, so erfüllen die Ausdrücke (35) die Bedingungen des ersten Satzes der gegenwärtigen Vorlesung, durch dessen Anwendung man mit Berücksichtigung der Gleichung (7) $A\, E = 1$ erhält:

$$(37) \quad \ldots \quad L^2 = \Sigma C_{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n} \cdot a_{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n} \cdot e_{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, wenn eine der beiden gegebenen Functionen f oder φ die Summe der Quadrate der Variabeln ist, zum Beispiel wenn:

$$\varphi = x_0^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2,$$

und wenn die Substitutionen (2) diese Function transformiren in:

$$\varphi = X_0^2 + X_1^2 + \ldots X_n^2,$$

indem $\nu_0 = \nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$, während dieselben Substitutionen die Function f transformiren in:

$$f = \mu_0 X_0^2 + \mu_1 X_1^2 + \ldots\ldots \mu_n X_n^2,$$

und man wird in dem Folgenden sehen, dass die Substitutionen (2) dieses immer zu leisten vermögen.

In diesem Falle sind nach einem früher gegebenen Satze die Substitutionscoefficienten a den entsprechenden e gleich. Es ist daher nach (6) $A = E$. Da ferner sich die Substitutionen (1) und (3) nur durch die Bezeichnung der Variabeln von einander unterscheiden, so werden auch die Producte der einen von den Producten der anderen in ihren Entwickelungen (35) sich nur in der Bezeichnung der Variabeln von einander unterscheiden; weshalb man hat:

$$\frac{a_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n}}{M\,.\,A\,.\,L} = \frac{M\,.\,e_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n}}{E\,.\,L}$$

oder:

$$e_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n} = \frac{a_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n}}{M^2},$$

und wenn man diesen Werth von $e_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n}$ in (37) substituirt, so erhält man:

$$(38) \ldots\ldots\ L^2 . M^2 = \Sigma C_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n} . a^2_{\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_n}.$$

Man sieht hier, wie sich das Quadrat eines bestimmten Ausdrucks $L.M$ zerlegt in die Summe von Quadraten. Verschwindet der Ausdruck, so zerlegt sich die eine Bedingung seines Verschwindens unter der Voraussetzung der Realität in so viele Bedingungsgleichungen als man verschiedene Quadrate hat, aus welchen das verschwindende Quadrat zusammengesetzt ist.

In der sechsundzwanzigsten Vorlesung über die Bedingungen der Rotationsoberflächen zweiter Ordnung wird im Falle $n = 2$ diese Zerlegung des Quadrates $L^2 . M^2$ in die Summe von Quadraten dazu dienen, um ein dort auftretendes Paradoxon zu erklären.

Nachdem wir in den vorausgegangenen Sätzen und Gleichungen mannichfaltige Eigenschaften der Substitutionen (1) bis (4), welche die Transformationen (20) bewirken, dargelegt haben, so bleibt noch übrig diese Substitutionen selbst zu bestimmen und die Werthe der Coefficienten μ und ν in den transformirten Ausdrücken (20) festzustellen.

Ein Weg zur Lösung dieser Aufgabe ist bereits am Anfange der Untersuchung angedeutet worden. Macht man nämlich in (20) die Substitutionen (2), so erhält man durch Vergleichung beider Seiten der Gleichungen $(n+1)(n+2)$ Gleichungen zwischen den $(n+1)(n+3)$ zu bestimmenden Unbekannten. Diese Gleichungen hätte man weiter zu behandeln.

Ein zweites dem angegebenen äquivalentes System Gleichungen zwischen einer gleichen Zahl von Unbekannten erhält man, wenn man in (20) die Substitutionen (1) macht und beide Seiten der Gleichungen mit einander vergleicht.

In beiden Fällen sieht man, dass die Zahl der Unbekannten um $(n+1)$ grösser ist als die Zahl der Gleichungen zwischen den Unbekannten. Daher müssen $(n+1)$ von den Unbekannten willkürlich bleiben und die übrigen sich durch diese ausdrücken lassen.

Versucht man das eine System von Gleichungen auf das andere äquivalente zurückzuführen, so ergiebt sich daraus eine dritte Behandlung der Aufgabe, welche sich durch grosse Einfachheit für die Darstellung empfiehlt und der wir deshalb hier den Vorzug geben.

Betrachtet man die Gleichungen (20) als identische durch die Substitutionen (1) und differenzirt nach x_λ, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2} f'(x_\lambda) = a_\lambda^0 \mu_0 X_0 + a_\lambda^1 \mu_1 X_1 + \dots a_\lambda^n \mu_n X_n,$$

$$\tfrac{1}{2} \varphi'(x_\lambda) = a_\lambda^0 \nu_0 X_0 + a_\lambda^1 \nu_1 X_1 + \dots a_\lambda^n \nu_n X_n,$$

Gleichungen, welche gleich wie die Gleichungen (20) aus den Substitutionen folgen.

Die Substitutionen werden erfüllt, wenn man

für: $X_0, \; X_1, \; \dots X_\varkappa, \; \dots X_n$

setzt: $0, \; 0, \; \dots 1, \; \dots 0$

und zugleich

für: $x_0, \ x_1, \ \ldots \ldots \ x_n$

setzt: $e_0^{\varkappa}, \ e_1^{\varkappa}, \ \ldots \ldots \ e_n^{\varkappa}$.

Die angegebenen beiden Gleichungen müssen dadurch auch erfüllt werden; weshalb man hat:

$$\tfrac{1}{2} f'(e_\lambda^{\varkappa}) = a_\lambda^{\varkappa} \mu_\varkappa,$$

$$\tfrac{1}{2} \varphi'(e_\lambda^{\varkappa}) = a_\lambda^{\varkappa} \nu_\varkappa.$$

Eliminirt man $a_\lambda^{\varkappa}$ aus diesen Gleichungen, so erhält man mit Rücksicht auf die Bezeichnung (23): $\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \lambda_\varkappa$:

$$(39) \ \ldots \ldots \ldots \ f'(e_\lambda^{\varkappa}) - \lambda_\varkappa \varphi'(e_\lambda^{\varkappa}) = o.$$

Aus dieser Gleichung geht, wenn man für λ setzt $0, 1, 2, \ldots n$ ein ganzes System von $(n+1)$ Gleichungen zwischen den $(n+2)$ Unbekannten hervor:

$$\lambda_\varkappa, \ e_0^{\varkappa}, \ e_1^{\varkappa}, \ldots \ldots e_n^{\varkappa}.$$

Dieses System von $(n+1)$ Gleichungen ist linear und homogen in Rücksicht auf die letzten $(n+1)$ Unbekannten. Eliminirt man dieselben, so erhält man die Gleichung vom $(n+1)$ten Grade in Rücksicht auf die eine Unbekannte $\lambda_\varkappa$:

$$(40) \ldots \Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda_\varkappa b_{00}, & a_{01} - \lambda_\varkappa b_{01}, & \ldots & a_{0n} - \lambda_\varkappa b_{0n} \\ a_{10} - \lambda_\varkappa b_{10}, & a_{11} - \lambda_\varkappa b_{11}, & \ldots & a_{1n} - \lambda_\varkappa b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} - \lambda_\varkappa b_{n0}, & a_{n1} - \lambda_\varkappa b_{n1}, & \ldots & a_{nn} - \lambda_\varkappa b_{nn} \end{vmatrix} = o.$$

Die $(n+1)$ Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ sind demnach die Wurzeln dieser Gleichung $\Delta = o$ vom $(n+1)$ten Grade.

Hat man dieselben bestimmt, so kann man aus dem Systeme Gleichungen (39) für jedes $\varkappa$ die Verhältnisse der Unbekannten:

$$e_0^{\varkappa}, \ e_1^{\varkappa}, \ldots e_n^{\varkappa}$$

berechnen, während das Verhältniss von $\mu_\varkappa : \nu_\varkappa$ durch die Gleichung (23) $\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \lambda_\varkappa$ gegeben ist.

Nimmt man an, die $(n+1)$ Grössen $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_n$ seien gegeben, so bestimmt die Gleichung (23) $\mu_\varkappa = \lambda_\varkappa \cdot \nu_\varkappa$ die $(n+1)$ Grössen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$.

Um endlich nicht bloss die Verhältnisse von $e_0{}^\varkappa, e_1{}^\varkappa, \ldots e_n{}^\varkappa$ festzustellen, sondern die Werthe dieser Grössen selbst, setzen wir in der zweiten Gleichung (20) für $X_0, X_1, \ldots X_\varkappa, \ldots X_n$ respective $0, 0, \ldots 1, \ldots 0$ und für $x_0, x_1, \ldots x_n$ respective $e_0{}^\varkappa, e_1{}^\varkappa, \ldots e_n{}^\varkappa$, wodurch diese Gleichung übergeht in:

$$(41) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi(e_0{}^\varkappa, e_1{}^\varkappa, \ldots e_n{}^\varkappa) = \nu_\varkappa.$$

Kennt man nun nach dem Vorhergehenden die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $e_0{}^\varkappa, e_1{}^\varkappa, \ldots e_n{}^\varkappa$, so giebt diese Gleichung, weil $\nu_\varkappa$ eine gegebene Grösse ist, die Werthe der Substitutionscoefficienten selbst.

Neunzehnte Vorlesung.

Lineare Coordinaten-Transformation. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkt.

Wenn irgend drei Gleichungen zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes π im Raume und drei anderen Grössen X, Y, Z gegeben sind, so nennt man letztere im weitesten Sinne des Wortes Coordinaten des Punktes, weil sie gleich viel ob eindeutig oder mehrdeutig durch die gegebenen Gleichungen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes und durch sie den Punkt π im Raum bestimmen.

Ein specieller Fall solcher Coordinaten sind die elliptischen Raumcoordinaten, welche den Gegenstand einer besonderen Vorlesung bilden werden.

Ein anderer specieller Fall ist der, wenn die drei gegebenen Gleichungen von der Form sind:

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad X = \frac{U_0}{U_3}, \quad Y = \frac{U_1}{U_3}, \quad Z = \frac{U_2}{U_3},$$

in welchen sämmtliche U lineare Ausdrücke allein der rechtwinkligen Coordinaten bedeuten. In diesem Falle nennt man die Coordinaten X, Y, Z **lineare Coordinaten**, weil sie durch die rechtwinkligen Coordinaten eindeutig bestimmt sind, und weil sie zugleich wieder die rechtwinkligen Coordinaten eindeutig bestimmen.

Um die geometrische Bedeutung dieser linearen Coordinaten festzustellen, bilden wir die Gleichungen von vier Ebenen:

$$U_0 = o, \quad U_1 = o, \quad U_2 = o, \quad U_3 = o,$$

welche durch die Transformationsformeln (1) gegeben sind. Auf diese vier, als die Seitenflächen eines Tetraeders, des **Coordinaten-Tetraeders**, aufgefassten Ebenen, werden wir die linearen Coordinaten beziehen.

Die Gleichungen der vier Ebenen führen wir durch Multiplication mit den Factoren $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ nach (5) der zweiten Vorlesung zurück auf ihre Normalformen:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o, \quad A_3 = o,$$

welche wir in (1) für die allgemeinen Formen einführen, indem wir setzen:

$$U_0 = \frac{A_0}{\mu_0}, \quad U_1 = \frac{A_1}{\mu_1}, \quad U_2 = \frac{A_2}{\mu_2}, \quad U_3 = \frac{A_3}{\mu_3}.$$

Da in die Gleichungen (1) nur die Verhältnisse der Factoren μ eingehen, so kann man, ohne die Allgemeinheit dieser Gleichungen zu beschränken, annehmen, dass sämmtliche Factoren μ kleiner als 1 seien und gleich den Sinus gewisser Winkel, nämlich:

$$\mu_0 = \sin\alpha_0, \quad \mu_1 = \sin\alpha_1, \quad \mu_2 = \sin\alpha_2, \quad \mu_3 = \sin\alpha_3.$$

Wir denken uns nun vier Richtungslinien L_0, L_1, L_2, L_3 im Raume, jede derselben einer Seitenfläche des Tetraeders entsprechend der Art, dass die Richtungslinie L_0 mit der Seitenfläche $U_0 = o$ den Neigungswinkel α_0 bildet, dass die Richtungslinie L_1 mit der Seitenfläche $U_1 = o$ den Neigungswinkel α_1 bildet, und so ferner. Ziehen wir alsdann von dem Punkte π vier gerade

Linien parallel den vier bestimmten Richtungslinien bis sie respective die Seitenflächen des Tetraeders schneiden, und bezeichnen ihre Längen mit l_0, l_1, l_2, l_3 so haben wir, weil A_0, A_1, A_2, A_3 nach (8) der zweiten Vorlesung die negativen Abstände des Punktes π von den Seitenflächen des Tetraeders ausdrücken:

$$-l_0 = U_0, \quad -l_1 = U_1, \quad -l_2 = U_2, \quad -l_3 = U_3,$$

und die Gleichungen (1) gehen bei dieser Bezeichnung über in:

$$X = \frac{l_0}{l_3}, \quad Y = \frac{l_1}{l_3}, \quad Z = \frac{l_2}{l_3},$$

welche Gleichungen die geometrische Bedeutung der linearen Coordinaten X, Y, Z erkennen lassen.

Löset man das System Gleichungen (1) nach den rechtwinkligen Coordinaten des Punktes π auf, so erhält man Gleichungen von derselben Form:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{u_0}{u_3}, \quad y = \frac{u_1}{u_3}, \quad z = \frac{u_2}{u_3},$$

indem sämmtliche u lineare Ausdrücke der linearen Coordinaten X, Y, Z bezeichnen, von derselben Willkürlichkeit in den Coefficienten als die Ausdrücke U in den Gleichungen (1). Man kann daher auch die Gleichungen (2) an Stelle der Gleichungen (1) als die ursprünglichen nehmen.

Es ist in vielen Fällen zweckmässig statt dreier linearer Coordinaten vier homogene lineare Coordinaten. X, Y, Z, P zu brauchen, indem man für X, Y, Z setzt $\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P}$. Sie bedeuten gerade die in dem Vorhergehenden bezeichneten Längen l_0, l_1, l_2, l_3. Multiplicirt man nach Einführung dieser vier Coordinaten Zähler und Nenner der Ausdrücke (2) mit P, so werden die u von der Form:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} u_0 &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ u_1 &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ u_2 &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ u_3 &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der 16 Coefficienten in diesen Ausdrücken ergiebt sich, wenn man je drei von den linearen homogenen Coordinaten gleich o setzt. Setzt man zum Beispiel

$Y = Z = P = o$, wodurch der Schnittpunkt der drei Ebenen $U_1 = o$, $U_2 = o$, $U_3 = o$ ausgedrückt wird, so erhält man für diesen Schnittpunkt aus (2) die rechtwinkligen Coordinaten:

$$x = \frac{x_0}{p_0}, \quad y = \frac{y_0}{p_0}, \quad z = \frac{z_0}{p_0}.$$

Es sind hiernach x_0, y_0, z_0, p_0 die rechtwinkligen homogenen Coordinaten der Ecke des Coordinaten-Tetraeders, welche der Seitenfläche $U_0 = o$ gegenüber liegt, und so ferner.

Ein specieller Fall unserer linearen Coordinaten-Bestimmung verdient hervorgehoben zu werden, weil er eine statische Deutung zulässt. Wir meinen den Fall, wenn $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$, für welchen die Gleichungen (2) die Gestalt erhalten:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= \frac{x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P}{X + Y + Z + P}, \\ y &= \frac{y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P}{X + Y + Z + P}, \\ z &= \frac{z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P}{X + Y + Z + P}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nämlich die Längen der linearen homogenen Coordinaten X, Y, Z, P als Gewichte, welche an den Ecken des Coordinaten-Tetraeders ohne Masse in der Richtung der Schwerkraft wirken, so sind bekanntlich die Ausdrücke für x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes π des Systemes, dessen Lage sich im Raume zugleich mit den Gewichten beliebig ändert. Diese Gewichts-Coordinaten bilden das Fundament des barycentrischen Calculs von Moebius, eines der vielen Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück und führen, indem wir für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z setzen $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ die homogenen rechtwinkligen Coordinaten ein, so ergeben sich aus (2) folgende Substitutionen:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= x_0 X + x_1 Y + x_2 Z + x_3 P, \\ y &= y_0 X + y_1 Y + y_2 Z + y_3 P, \\ z &= z_0 X + z_1 Y + z_2 Z + z_3 P, \\ p &= p_0 X + p_1 Y + p_2 Z + p_3 P. \end{aligned}$$

zur Uebertragung aus dem rechtwinkligen System in das Tetraeder-System.

Die aufgelösten Gleichungen (5):

$$(6) \quad \begin{aligned} X &= u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 p, \\ Y &= u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 p, \\ Z &= u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 p, \\ P &= u_3 x + v_3 y + w_3 z + r_3 p \end{aligned}$$

dienen zur Uebertragung aus dem Tetraeder-System in das rechtwinklige System. Die Coefficienten in den letzten Gleichungen erweisen sich als die Coordinaten der vier Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders.

Die Coefficienten in beiden Substitutionen (5) und (6) sind ganz unabhängig von der Lage des Punktes π. Sie hängen ab von der Lage der Coordinatensysteme zu einander und ihrer Gestalt. Sie hängen ausserdem ab von den Richtungslinien L, weil in die Substitutionen nicht bloss die Verhältnisse der homogenen Coordinaten der Ecken oder die Verhältnisse der homogenen Coordinaten der Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders eingehen.

Wenn neben dem genannten Tetraeder-System noch ein zweites derselben Art gegeben ist, so vermitteln Gleichungen von derselben Form als (5) den Uebergang von dem rechtwinkligen System in das zweite Tetraeder-System. Setzt man in beiden Systemen Gleichungen die Ausdrücke x einander gleich, ebenso die Ausdrücke für y, und so ferner, so erhält man Relationen für die Uebertragung von einem Tetraeder-System in ein anderes Tetraeder-System. Die Auflösungen dieser linearen Relationen nach den Coordinaten ein und desselben Systemes führen wieder auf Gleichungen von der Gestalt (5) zurück. In diesen Gleichungen hängen die Coefficienten der Coordinaten des anderen Systemes allein ab von der Lage der Tetraeder-Systeme zu einander, von ihrer Gestalt und von den Richtungslinien beider Systeme.

Durch diese linearen Transformationen ändert sich die Ordnung einer homogenen Gleichung nicht. Deshalb wird jede homogene Gleichung der Coordinaten der zweiten Ordnung, gleichviel auf welches lineare Coordinatensystem sie sich bezieht, immer eine Oberfläche zweiter Ordnung darstellen, sowie eine homogene Gleichung erster Ordnung eine Ebene; und eine beliebig

gegebene Oberfläche zweiter Ordnung oder Ebene wird in jedem linearen Coordinatensystem sich durch eine Gleichung zweiter oder erster Ordnung analytisch ausdrücken lassen.

Nimmt man an, die Gleichungen (5) seien die Transformationsformeln zur Uebertragung von einem Tetraedersystem in ein beliebiges andere, und es sei die Gleichung einer Ebene in dem ersten System gegeben:

$$ux + vy + wz + rp = o,$$

so geht dieselbe durch die Substitutionen (5) über in eine von gleicher Form:

$$UX + VY + WZ + RP = o,$$

indem man hat:

$$(7) \quad \begin{aligned} U &= x_0 u + y_0 v + z_0 w + p_0 r, \\ V &= x_1 u + y_1 v + z_1 w + p_1 r, \\ W &= x_2 u + y_2 v + z_2 w + p_2 r, \\ R &= x_3 u + y_3 v + z_3 w + p_3 r. \end{aligned}$$

Nennt man die die Ebene im ersten Coordinatensystem bestimmenden Coefficienten u, v, w, r **homogene Ebenencoordinaten** in dem ersten, und demnach die Coefficienten U, V, W, R homogene Ebenencoordinaten in dem zweiten linearen Coordinatensystem, so hat man zur Uebertragung aus dem einen System in das andere die Gleichungen (7).

Löset man diese Gleichungen auf, um die Ebenencoordinaten des ersten Systemes auszudrücken durch die entsprechenden Ebenencoordinaten des zweiten Systemes, so erhält man, da die Gleichungen (6) die Auflösungen sind der Gleichungen (5), auf Grund von (23) der siebenten Vorlesung:

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= u_0 U + u_1 V + u_2 W + u_3 R, \\ v &= v_0 U + v_1 V + v_2 W + v_3 R, \\ w &= w_0 U + w_1 V + w_2 W + w_3 R, \\ r &= r_0 U + r_1 V + r_2 W + r_3 R, \end{aligned}$$

Auch diese Substitutionen ändern die Ordnung einer homogenen Gleichung nicht. Es ist daher in jedem linearen Coordinatensystem eine homogene Gleichung der zweiten Ordnung in Ebenencoordinaten der analytische Ausdruck für eine Oberfläche

zweiter Ordnung, und eine homogene Gleichung der ersten Ordnung der analytische Ausdruck für einen Punkt.

Wir schliessen diese allgemeinen Betrachtungen mit der Bemerkung, dass, wenn man in der Gleichung einer auf ein beliebiges lineares Coordinatensystem bezogenen Oberfläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten eine der Coordinaten gleich o setzt, man den analytischen Ausdruck der Curve erhält, in welcher die eine Seitenfläche des Coordinaten-Tetraeders die Oberfläche schneidet. Da hierdurch die Ordnung der Gleichung sich nicht ändert, so nennt man mit Recht jede Schnittcurve einer Oberfläche zweiter Ordnung und einer Ebene, die wir in der vierzehnten Vorlesung als einen Kegelschnitt erkannten, eine Curve zweiter Ordnung.

Als einen speciellen Fall des Tetraeder-Coordinatensystems lässt sich das schiefwinklige Coordinatensystem betrachten. Denn lässt man drei Ecken des Coordinaten-Tetraeders in das Unendliche fallen, und nimmt an, dass drei von den Richtungslinien respective den drei im Endlichen liegenden Kanten des Tetraeders parallel gehen, so hat man das schiefwinklige Coordinatensystem.

Um aus den allgemeinen Transformationsformeln (2), (3) die diesem Falle entsprechenden herzuleiten, hat man zu setzen $p_0 = p_1 = p_2 = o$, und da für alle im Endlichen liegenden Punkte die ihnen entsprechenden unendlich grossen Werthe von P einander gleich und constant sind, so nehmen die Gleichungen (2) die Form an:

$$
\begin{aligned}
x &= aX + a'Y + a''Z + a''', \\
(9) \quad \ldots\ldots\quad y &= bX + b'Y + b''Z + b''', \\
z &= cX + c'Y + c''Z + c''',
\end{aligned}
$$

woselbst $a''' = \frac{x_3}{p_3}$, $b''' = \frac{y_3}{p_3}$, $c''' = \frac{z_3}{p_3}$ die rechtwinkligen Coordinaten der im Endlichen liegenden Ecke des Coordinaten-Tetraeders, des Anfangspunktes des schiefwinkligen Systemes, bedeuten. Diese Bedeutung ergiebt sich auch aus den Transformationsformeln (5), wenn man daselbst setzt: $X = Y = Z = o$.

Der Durchgang durch das Unendliche zur Herleitung der Formeln (9) wird auf folgendem Wege vermieden.

Es seien:

$$A_0 = o, \quad A_1 = o, \quad A_2 = o$$

die Normalformen der Gleichungen der drei Coordinatenebenen irgend eines schiefwinkligen Coordinatensystems bezogen auf das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem. Bedeuten nun x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes π im Raume, so sind A_0, A_1, A_2 die negativen senkrechten Abstände des Punktes π von den erwähnten drei Coordinatenebenen. Bezeichnet man mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ die Winkel, welche die Schnittlinien je zweier Coordinatenebenen, die Coordinatenaxen des schiefwinkligen Systemes, mit der dritten Coordinatenebene bilden, und mit X, Y, Z die Coordinaten des Punktes π in dem schiefwinkligen System, welche den Coordinatenaxen parallel gehen, so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten folgende lineare Gleichungen:

$$(10) \quad . \; . \; . \quad X = \frac{-A_0}{\sin \alpha_0}, \quad Y = \frac{-A_1}{\sin \alpha_1}, \quad Z = \frac{-A_2}{\sin \alpha_2},$$

in welchen die geometrische Bedeutung der in ihnen enthaltenen 12 Constanten ohne Weiteres zu Tage tritt. Die Auflösungen dieser Gleichungen nach den Coordinaten des rechtwinkligen Systemes geben aber Gleichungen von der Form (9).

Wie diese Gleichungen (9) den Uebergang vermitteln von dem rechtwinkligen Coordinatensystem in ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem, so dienen analog gebildete Gleichungen mit veränderten Constanten zur Transformation von dem rechtwinkligen System in ein beliebiges anderes schiefwinkliges Coordinatensystem. Setzt man nun in beiden Systemen Gleichungen die Ausdrücke für x, für y u. s. w. einander gleich, so erhält man drei lineare Gleichungen zur Uebertragung von dem einen schiefwinkligen System unmittelbar in das andere. Aus den Auflösungen dieser Gleichungen nach den Coordinaten ein und desselben Systemes gehen Gleichungen hervor, wieder von der Form (9), wobei zu bemerken ist, dass die 12 Coefficienten in den aufgelösten Gleichungen unabhängig sind von der Lage des beliebig im Raume gewählten Punctes π, und nur abhängen von der Lage und Gestalt der beiden Coordinatensysteme.

Wir werden im Folgenden annehmen, die Gleichungen (9) seien die Transformationsformeln von einem schiefwinkligen Coordinatensystem in ein beliebiges anderes schiefwinkliges Coordi-

natensystem, um die geometrische Bedeutung der 12 Constanten unter dieser Voraussetzung zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke lassen wir den beliebigen Punkt π im Raume in den Anfangspunkt des zweiten Coordinatensystemes XYZ fallen, indem wir setzen $X = Y = Z = o$, wodurch die Coordinaten des genannten Anfangspunktes in dem ersten Systeme erhalten werden $x = a''', y = b''', z = c'''$. Es bedeuten also die Constanten a''', b''', c''' in (9), die Coordinaten des Anfangspunktes des zweiten Systemes in dem ersten.

Setzen wir $x + a''', y + b''', z + c'''$ respective für x, y, z, so ändern wir damit nur den Coordinatenanfangspunkt des ersten Coordinatensystemes, indem wir ihn in den Coordinatenanfangspunkt des zweiten Systemes verlegen, lassen aber die Richtungen der Coordinatenaxen des ersten Systemes ungeändert. Durch diese Veränderung gehen die Gleichungen (9) über in:

$$
\begin{aligned}
x &= aX + a'Y + a''Z, \\
\text{(11)} \quad y &= bX + b'Y + b''Z, \\
z &= cX + c'Y + c''Z.
\end{aligned}
$$

Sie vermitteln den Uebergang von einem beliebigen schiefwinkligen Coordinatensystem in ein beliebiges anderes schiefwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkt.

Um die geometrische Bedeutung der 9 Constanten in diesen Gleichungen zu ermitteln, welche dieselben sind als in den Gleichungen (9), verlegen wir den beliebigen Punkt π des Raumes in die XAxe, vom gemeinsamen Anfangspunkte beider Coordinatensysteme um die Einheit entfernt. Fällt man nun Lothe von dem so gelegenen Punkt π auf die yz, zx, xy Ebene und bezeichnet die Winkel, welche die XAxe mit den genannten Ebenen bildet, mit $(X, yz), (X, zx), (X, xy)$ u. s. w., so sind die Lothe auf die genannten Ebenen respective gleich:

$$\sin(X, yz), \quad \sin(X, zx), \quad \sin(X, xy)$$

und durch die Coordinaten x, y, z des Punktes π in dem ersten System ausgedrückt:

$$x \sin(x, yz), \quad y \sin(y, zx), \quad z \sin(z, xy).$$

Weshalb man für den bezeichneten Punkt π hat:

$$x = \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad y = \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, \quad z = \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}.$$

Da aber für den so gelegenen Punkt π ist $X = 1$, $Y = Z = o$, so hat man auch nach (11):

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

und daher:

$$a = \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad b = \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, \quad c = \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}.$$

Auf diese Weise erhält man die folgende geometrische Bedeutung der 9 Coefficienten in (9) oder (11):

$$(12) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\sin(X, yz)}{\sin(x, yz)}, & b &= \frac{\sin(X, zx)}{\sin(y, zx)}, & c &= \frac{\sin(X, xy)}{\sin(z, xy)}, \\ a' &= \frac{\sin(Y, yz)}{\sin(x, yz)}, & b' &= \frac{\sin(Y, zx)}{\sin(y, zx)}, & c' &= \frac{\sin(Y, xy)}{\sin(z, xy)}, \\ a'' &= \frac{\sin(Z, yz)}{\sin(x, yz)}, & b'' &= \frac{\sin(Z, zx)}{\sin(y, zx)}, & c'' &= \frac{\sin(Z, xy)}{\sin(z, xy)}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, wenn das erste Coordinatensystem rechtwinklig ist, folgende Werthe der 9 Coefficienten:

$$(13) \quad \begin{aligned} a &= \cos(X, x), & b &= \cos(X, y), & c &= \cos(X, z), \\ a' &= \cos(Y, x), & b' &= \cos(Y, y), & c' &= \cos(Y, z), \\ a'' &= \cos(Z, x), & b'' &= \cos(Z, y), & c'' &= \cos(Z, z). \end{aligned}$$

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind, welchen Fall wir allein in dem Folgenden in Betracht ziehen werden, müssen sich diese 9 Coefficienten durch die drei Bestimmungsstücke der Lage des zweiten Systemes zu dem ersten ausdrücken lassen.

Euler drückt die 9 Coefficienten aus durch drei Winkel, nämlich durch die beiden Winkel, welche die Schnittlinie der Coordinatenebenen xy und XY mit der xAxe und mit der XAxe bildet, und durch den Neigungswinkel, den die genannten beiden Coordinatenebenen bilden. Da jedoch diese Ausdrucksweise der Symmetrie gänzlich entbehrt, so stellt er in einer zweiten Behandlung des Gegenstandes die 9 Coefficienten als Functionen

von vier Winkeln in symmetrischer Weise dar. Er wählt zu diesem Zwecke die drei Winkel, welche die Drehungsaxe, um die das eine Coordinatensystem gedreht werden muss, um in die Lage des andern zu kommen, mit den Coordinatenaxen bildet, und den Drehungswinkel. Indem er diesen symmetrischen Ausdrücken der 9 Coefficienten noch die symmetrische Relation zwischen den genannten drei Winkeln der Drehungsaxe beifügt, so giebt ihm diese Relation einen Ersatz für die erste Ausdrucksweise durch drei Bestimmungsstücke.

Monge bewahrt die Symmetrie, indem er die 9 Coefficienten durch drei derselben a, b', c'' ausdrückt, welche eine symmetrische Lage zu den übrigen haben.

Alle diese Ausdrücke sind irrational. In den Euler'schen Formeln ist die Irrationalität nur verdeckt durch den Gebrauch der Sinus- und Cosinus-Functionen. Wir werden es im Folgenden vermeiden irrationale Ausdrücke zu gebrauchen, indem wir, wie es bereits üblich geworden ist, alle 9 Coefficienten beibehalten, sie aber durch die 6 Bedingungen beschränken, welche zwischen ihnen stattfinden.

Es seien die Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkt:

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}$$

Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes π im Raume von dem gemeinsamen Anfangspunkte der Coordinatensysteme ist in dem einen Systeme $x^2 + y^2 + z^2$, in dem anderen $X^2 + Y^2 + Z^2$. Man hat daher die durch die Substitutionen (14) identische Gleichung:

$$(15) \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Wenn man in diese Gleichung die Werthe der Coordinaten (14) des ersten Systemes einsetzt, und beide Seiten der Gleichung

vergleicht, so erhält man die 6 zwischen den 9 Coefficienten der Substitutionen stattfindenden Relationen:

$$(16) \ldots \begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''a + b''b + c''c = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0. \end{array}$$

Dass diese 6 Bedingungsgleichungen hinreichen, um unter der Voraussetzung, dass das erste Coordinatensystem ein rechtwinkliges sei, auch das andere Coordinatensystem zu einem rechtwinkligen zu machen, geht aus der geometrischen Interpretation dieser Gleichungen hervor. Denn mit Rücksicht auf (13) drücken die drei letzten Gleichungen (16) die Bedingungen aus, dass die Coordinatenaxen des zweiten Systemes auf einander senkrecht stehen, während die drei ersten die bekannten Bedingungen sind zwischen den Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen des zweiten Systemes mit den Coordinatenaxen des ersten Systemes bilden.

Welche Relationen man überdies ohne weitere Beschränkung zwischen den 9 Coefficienten ableiten mag, sie werden sich alle aus den angegebenen 6 Bedingungsgleichungen (16) ableiten lassen. Die nachfolgenden Relationen bieten Beispiele für Ableitungen der Art dar.

Von den unendlich vielen, zwischen den 9 Coefficienten der Substitutionen (14) stattfindenden Relationen, werden wir auf dem einfachsten Wege nur die gebräuchlichsten entwickeln.

Wir differenziren zu diesem Zwecke die durch die Substitutionen (14) identische Gleichung (15) nach den Variabeln X, Y, Z, wodurch wir erhalten:

$$(17) \ldots\ldots \begin{array}{l} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z, \end{array}$$

welche Gleichungen die Auflösungen sind der Substitutionen (14) mit denselben Coefficienten, aber veränderter Anordnung.

Die Substitution von (17) in die Gleichung (15) und die Vergleichung beider Seiten der Gleichung mit einander giebt:

$$(18) \ldots \begin{array}{ll} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = o, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ca + c'a' + c''a'' = o, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = o. \end{array}$$

Bildet man die Determinante Δ:

$$(19) \ldots \ldots \quad \Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$$

$$= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

und erhebt dieselbe zum Quadrat, so erhält man:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix},$$

oder nach (31) der siebenten Vorlesung:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2, & aa' + bb' + cc', & aa'' + bb'' + cc'' \\ a'a + b'b + c'c, & a'^2 + b'^2 + c'^2, & a'a'' + b'b'' + c'c'' \\ a''a + b''b + c''c, & a''a' + b''b' + c''c', & a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{vmatrix}$$

und mit Rücksicht auf (16):

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Determinante Δ selbst ist hiernach entweder $+1$ oder -1. Wir werden im Folgenden annehmen, sie sei gleich $+1$. Denn wäre sie -1, so brauchte man nur für X, Y, Z respective zu setzen $-X, -Y, -Z$, was geometrisch darauf hinauskäme die negativen Richtungen der Coordinatenaxen des zweiten Coordinatensystemes für die positiven zu nehmen. Wir haben daher:

$$(20) \ldots \ldots \ldots \quad \Delta = 1.$$

Es ist diese Determinante Δ der gemeinsame Nenner der Bruchwerthe der Unbekannten X, Y, Z, welche die directe Auf-

lösung der Gleichungen (14) ergiebt. Vergleicht man diese directen Auflösungen mit den Auflösungen (17), so erhält man folgende Relationen.

$$(21)\ldots\quad \begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a, & c'a'' - c''a' &= b, & a'b'' - a''b' &= c,\\ b''c - bc'' &= a', & c''a - ca'' &= b', & a''b - ab'' &= c',\\ bc' - b'c &= a'', & ca' - c'a &= b'', & ab' - a'b &= c''. \end{aligned}$$

Von diesen 22 Relationen zwischen den 9 Coefficienten der Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem mit unverändertem Anfangspunkt macht man den häufigsten Gebrauch. Eine Beachtung verdienen jedoch auch die folgenden Relationen:

Wenn man das Product der Variabeln nach den Substitutionen (17) also darstellt:

$$(22)\ \ldots\ldots\quad XYZ = \Sigma A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\, x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so hat man folgende Werthe der Entwickelungscoefficienten A:

$$A_{300} = aa'a'',\quad A_{030} = bb'b'',\quad A_{003} = cc'c'',$$

$$(23)\ \ldots\ldots\quad \begin{aligned} A_{120} &= ab'b'' + a'b''b + a''bb',\\ A_{102} &= ac'c'' + a'c''c + a''cc',\\ A_{012} &= bc'c'' + b'c''c + b''cc',\\ A_{210} &= ba'a'' + b'a''a + b''aa',\\ A_{201} &= ca'a'' + c'a''a + c''aa',\\ A_{021} &= cb'b'' + c'b''b + c''bb', \end{aligned}$$

$$A_{111} = ab'c'' + ab''c' + a'b''c + a'bc'' + a''bc' + a''b'c.$$

Zwischen diesen Grössen A findet nach (15) der achtzehnten Vorlesung folgende Gleichung Statt:

$$(24)\ \ldots\quad \begin{aligned} 1 = {} & 6\left\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\right\} + A_{111}^2\\ & + 2\left\{A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2\right\}, \end{aligned}$$

denn die Ausdrücke E an der genannten Stelle sind den ihnen entsprechenden Ausdrücken A in dem vorliegenden Falle gleich.

Die 10 Quadrate, aus welchen die Gleichung (24) zusammengesetzt ist, lassen sich auf 7 Quadrate zurückführen, wenn man auf Grund von (16) bemerkt, dass:

$$(25) \quad \begin{aligned} A_{120} + A_{102} + 3A_{300} &= o, \\ A_{012} + A_{210} + 3A_{030} &= o, \\ A_{201} + A_{021} + 3A_{003} &= o. \end{aligned}$$

Denn man hat nach der ersten von diesen Gleichungen:

$$9A_{300}^2 = A_{120}^2 + 2A_{120}A_{102} + A_{102}^2.$$

Addirt man zu dieser Gleichung folgende:

$$(A_{120} - A_{102})^2 = A_{120}^2 - 2A_{120}A_{102} + A_{102}^2,$$

so erhält man:

$$9A_{300}^2 + (A_{120} - A_{102})^2 = 2(A_{120}^2 + A_{102}^2),$$

und in gleicher Weise:

$$9A_{030}^2 + (A_{012} - A_{210})^2 = 2(A_{012}^2 + A_{210}^2),$$

$$9A_{003}^2 + (A_{201} - A_{021})^2 = 2(A_{201}^2 + A_{021}^2),$$

wodurch die Gleichung (24) übergeht in:

$$(26) \quad \begin{aligned} 1 = \; & 15\left\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\right\} + A_{111}^2 \\ & + (A_{120} - A_{102})^2 + (A_{012} - A_{210})^2 + (A_{201} - A_{021})^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben Veranlassung zu einigen kurzen Bemerkungen.

Wenn man statt von den Substitutionen (14) von den Substitutionen (17) ausgegangen wäre, so würde man analoge Gleichungen erhalten haben, welche aus den Gleichungen (23) bis (26) bloss dadurch hervorgehen, dass man die Vertauschungen macht:

$$a' \text{ mit } b, \quad a'' \text{ mit } c, \quad b'' \text{ mit } c'.$$

Man kann demnach sagen, dass die rechten Theile der Gleichungen (24) und (26) durch diese Vertauschungen sich nicht ändern.

Der Hinblick auf den Werth des letzten Ausdruckes (23) lehrt, dass durch die genannten Vertauschungen der Ausdruck ungeändert bleibt:

$$A_{111}.$$

Setzt man die Werthe von A_{300}, A_{030}, A_{003} aus (25) in die Gleichungen (24) und (26) und eliminirt nach der Entwickelung die Summe der 6 gleichartigen Quadrate A aus den beiden Gleichungen, so ersieht man aus der resultirenden Gleichung, dass durch jene Vertauschungen auch folgender Ausdruck ungeändert bleibt:

$$(27) \quad \ldots\ldots \quad A_{120} \cdot A_{102} + A_{012} \cdot A_{210} + A_{201} \cdot A_{021}.$$

Bleibt aber dieser Ausdruck ungeändert, so lehrt die durch (25) veränderte Gleichung (26), dass ebenfalls die Summe der 6 Quadrate ungeändert bleibt:

$$(28) \quad \ldots\ldots \quad A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2.$$

Die Gleichung (24) endlich beweist, dass durch die angegebene Aenderung auch folgender Ausdruck sich dem Werthe nach nicht ändert:

$$(29) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2.$$

Aus diesen einfachen Bemerkungen folgen complicirte Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten, deren directe Herleitung nicht ohne viele Rechnung zu bewerkstelligen ist.

Will man die in (23) dargestellten Ausdrücke zugleich mit den Substitutionscoefficienten in den Calcul einführen, so ist folgendes ein kräftiges Mittel zur Entdeckung neuer Relationen.

Man kann die Ausdrücke (23) also ordnen:

$$\begin{aligned} 3A_{300} &= a(a'a'') + a'(a''a) + a''(aa'), \\ A_{210} &= b(a'a'') + b'(a''a) + b''(aa'), \\ A_{201} &= c(a'a'') + c'(a''a) + c''(aa'). \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Substitutionen (14), so sieht man, dass für die Werthe der Variabeln $X = a'a''$, $Y = a''a$, $Z = aa'$ die Variabeln des anderen Systemes die Werthe annehmen $x = 3A_{300}$, $y = A_{210}$, $z = A_{201}$. In dieser Weise correspondiren folgende Werthe der Variabeln:

x,	y,	z,	X,	Y,	Z,
$3A_{300}$,	A_{210},	A_{201},	$a'a''$,	$a''a$,	aa',
A_{120},	$3A_{030}$,	A_{021},	$b'b''$,	$b''b$,	bb',
A_{102},	A_{012},	$3A_{003}$,	$c'c''$,	$c''c$,	cc'.

Wenn man diese correspondirenden Werthe für die Variabeln in die bereits hergeleiteten Gleichungen oder überhaupt in Gleichungen einsetzt, welche durch die Substitutionen (14) oder (17) identische werden, so erhält man Relationen der complicirtesten Art.

Nehmen wir jedoch nach diesen Andeutungen die Substitutionen (14) wieder auf. Aus ihnen geht mit Rücksicht auf (21), wenn man aus je zwei Gleichungen eine der Variabeln X, Y, Z eliminirt, folgendes System von Gleichungen hervor:

$$
(30) \quad \begin{aligned}
cy - bz &= a'Z - a''Y, \\
c'y - b'z &= a''X - aZ, \\
c''y - b''z &= aY - a'X, \\[4pt]
az - cx &= b'Z - b''Y, \\
a'z - c'x &= b''X - bZ, \\
a''z - c''x &= bY - b'X, \\[4pt]
bx - ay &= c'Z - c''Y \\
b'x - a'y &= c''X - cZ, \\
b''x - a''y &= cY - c'X.
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen mit $b'c'X$, die zweite darunter stehende Gleichung mit bcY, und zieht die letztere von der ersten ab, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&cc'y(b'X - bY) + bb'z(cY - c'X) \\
&= a'b'c'ZX + abcYZ - a''XY(bc + b'c').
\end{aligned}
$$

Benutzt man zur Umformung des rechten Theiles dieser Gleichung die Gleichungen (18) und des linken Theiles die Gleichungen (30) und (16), so erhält man schliesslich:

$$
(31) \quad \begin{aligned}
&aa'a''yz + bb'b''zx + cc'c''xy \\
&= abcYZ + a'b'c'ZX + a''b''c''XY.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung, unter welcher diese Gleichung stattfindet, wiederholen wir in dem folgenden algebraischen Satze:

Wenn die Substitutionen (14) die Gleichung (15) zu einer identischen Gleichung machen, so machen dieselben Substitutionen auch die Gleichung (31) zu einer identischen Gleichung.

Geometrisch gedeutet sagt dieser Satz aus, dass die Coordinatenaxen zweier rechtwinkligen Systeme mit demselben Anfangspunkt auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen. Denn man erhält die Gleichung des Kegels, auf welchem die Coordinatenaxen der beiden in Betracht gezogenen rechtwinkligen Systeme liegen, wenn man einen der gleichen Ausdrücke (31) gleich o setzt.

Die Gleichung einer Ebene in der Form:

$$ux + vy + wz + 1 = o$$

durch die Substitutionen (14) transformirt auf das zweite rechtwinklige Coordinatensystem führt auf eine Gleichung zurück von derselben Form:

$$UX + VY + WZ + 1 = o,$$

indem man hat:

$$(32) \quad \begin{aligned} U &= au + bv + cw, \\ V &= a'u + b'v + c'w, \\ W &= a''u + b''v + c''w. \end{aligned}$$

Es sind dieses die Transformationsformeln für Ebenencoordinaten aus einem rechtwinkligen System in ein anderes ebenfalls rechtwinkliges System mit demselben Coordinatenanfangspunkt.

Der Vergleich mit den Substitutionen (32) zeigt, dass man nur die Punktcoordinaten mit den entsprechenden Ebenencoordinaten zu vertauschen braucht, um die Transformationsformeln für die einen aus den anderen zu erhalten. Macht man diese Vertauschung in (14), so erhält man die Auflösungen der Gleichungen (32):

$$(33) \quad \begin{aligned} u &= aU + a'V + a''W, \\ v &= bU + b'V + b''W, \\ w &= cU + c'V + c''W. \end{aligned}$$

Wenn nun in dem Vorhergehenden die 9 Coefficienten in den Substitutionen (14) oder (17) keiner weiteren Beschränkung unterlagen als der, dass die Substitutionen die Gleichung (15) zu einer identischen machen, so werden auch die 9 Coefficienten in den Substitutionen (33) oder (32) nur die einzige Bedingung zu erfüllen brauchen, dass die Substitutionen die Gleichung:

$$(34) \quad u^2 + v^2 + w^2 = U^2 + V^2 + W^2$$

zu einer identischen Gleichung machen, wenn das zweite Coordinatensystem ein beliebiges rechtwinkliges sein soll mit demselben Coordinatenanfangspunkt als das erste rechtwinklige Coordinatensystem.

Macht man endlich die angegebene Vertauschung der Punkt- und Ebenencoordinaten in der Gleichung (31), so erhält man:

$$(35) \quad \begin{aligned} & aa'a''vw + bb'b''wu + cc'c''uv \\ & = abc\,VW + a'b'c'\,WU + a''b''c''\,UV, \end{aligned}$$

welche Gleichung geometrisch ausdrückt, dass die Coordinatenebenen zweier rechtwinkligen Systeme mit demselben Coordinatenanfangspunkt einen Kegel zweiter Ordnung berühren.

Zwanzigste Vorlesung.

Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen.

Man hat in der sechszehnten Vorlesung gesehen, welche Willkür herrscht in der Bestimmung eines Systemes harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Diese Willkür wird einiger Maassen beschränkt, wenn man einen der vier harmonischen Pole mit dem Mittelpunkt der Oberfläche zusammenfallen lässt, wodurch die drei anderen in das Unendliche verlegt werden. Die Verbindungslinien der im Unendlichen liegenden drei Pole mit dem Mittelpunkte der Oberfläche sind conjugirte Durchmesser der Oberfläche. Wenn diese auf einander senkrecht stehen, so hat man die Hauptaxen der Oberfläche.

Dass alle diese Bedingungen sich erfüllen lassen, kann man auf folgende Art einsehen.

Beschreibt man um den Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung, den man der Einfachheit wegen für den

Coordinatenanfangspunkt wählen kann, eine Kugel mit einem gegebenen Radius, so hat man, da die Kugeloberfläche auch eine Oberfläche zweiter Ordnung ist, zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung, für welche das beiden gemeinsame System harmonischer Pole nach Vorschrift der sechszehnten Vorlesung bestimmt werden kann. Einer von diesen Polen ist der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Oberflächen. Denn die Coordinaten desselben genügen den Gleichungen (3) der sechszehnten Vorlesung, welche das beiden Oberflächen gemeinsame System harmonischer Pole bestimmen. Die drei anderen Pole liegen in dem Unendlichen. Erwägt man aber, dass die Polarebene der Kugel immer senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Poles mit dem Mittelpunkte der Kugel, so sieht man, dass die Polarebenen der drei Pole im Unendlichen in Rücksicht auf die Kugel drei in dem Mittelpunkte auf einander senkrecht stehende Ebenen sind. Diese Ebenen schneiden sich in drei von dem Mittelpunkt ausgehenden, auf einander senkrecht stehenden, geraden Linien, die den Mittelpunkt mit den drei Polen im Unendlichen verbinden. Sie sind daher die Hauptaxen der gegebenen Oberfläche.

Das Problem der Hauptaxen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung kommt hiernach darauf zurück, das der gegebenen Oberfläche und einer Kugel, mit demselben Mittelpunkt als die Oberfläche, gemeinsame System harmonischer Pole zu bestimmen. Dieses Problem ist in grösserer Allgemeinheit in der sechszehnten Vorlesung behandelt worden. Da man jedoch in dem vorliegenden Falle einen Pol des gemeinsamen Systemes harmonischer Pole kennt, nämlich den gemeinsamen Mittelpunkt beider Oberflächen, so wird die im allgemeinen Falle aufzulösende Gleichung $\varDelta = o$ vom vierten Grade sich in dem vorliegenden Falle auf den dritten Grad reduciren. Es werden überdies noch Specialitäten auftreten, die eine von dem vorhergehenden unabhängige Behandlung des Problemes wünschenswerth machen.

Nachdem wir auf diese Weise die Existenz der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung aus einem allgemeineren Gesichtspunkte nachgewiesen haben, so wollen wir jetzt untersuchen, welche Form der Gleichung:

$$f(x, y, z, 1) = o$$

eine Oberfläche zweiter Ordnung haben muss, wenn die Haupt-

axen der Oberfläche den Axen des rechtwinkligen Coordinatensystemes, auf welches sich die Gleichung der Oberfläche bezieht, parallel sind.

Der Mittelpunkt der Oberfläche und die auf den drei Coordinatenaxen im Unendlichen liegenden Punkte bilden ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Die Gleichungen der Polarebenen der drei letzten Pole sind:

$$f'(x) = o, \quad f'(y) = o, \quad f'(z) = o.$$

Da diese Ebenen aber den Coordinatenaxen parallel sein müssen, so darf in jeder dieser Gleichungen nur eine von den Variabeln vorkommen. Dieses trifft jedoch nur zu, wenn in der Gleichung der Oberfläche die Producte yz, zx, xy fehlen. Es ist daher das Verschwinden der drei Producte der Variabeln in der Gleichung der Oberfläche die Bedingung, dass das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches sich die Oberfläche bezieht, den Hauptaxen der Oberfläche parallel sei.

Fasst man das Problem der Hauptaxen allgemein auf, um auch die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt mit hereinzuziehen, indem man verlangt, dass irgend ein Coordinatensystem bestimmt werde, dessen Axen den Hauptaxen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung parallel sind, so lässt sich dasselbe rein algebraisch also ausdrücken:

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi(x, y, z) = \lambda X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

zu identischen Gleichungen machen, wenn:

$$(4) \ldots \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy.$$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $\varphi(x, y, z)$ die Summe der Glieder zweiter Ordnung sei in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z, 1) = 0$, von welcher die Richtungen der Hauptaxen zu bestimmen sind.

Um die Auflösung dieses algebraischen Problemes vorzubereiten, differenziren wir die identische Gleichung (2) nach den Variabeln X, Y, Z, wodurch wir erhalten:

$$(5) \quad \begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

und bringen die aus diesen Gleichungen durch Substitution von (1) sich ergebenden Relationen (16) der vorhergehenden Vorlesung wieder in Erinnerung:

$$(6) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned}$$

Die Differentiation der identischen Gleichung (3) nach der Variable X giebt:

$$a\varphi'(x) + b\varphi'(y) + c\varphi'(z) = 2\lambda X,$$

welche Gleichung nach Substitution von (5) sich auch so darstellen lässt:

$$x\varphi'(a) + y\varphi'(b) + z\varphi'(c) = 2\lambda(ax + by + cz).$$

Diese Gleichung, welche unabhängig ist von den Werthen der Variabeln in ihr, zerfällt in folgende drei Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi'(a) &= 2\lambda a, \\ \varphi'(b) &= 2\lambda b, \\ \varphi'(c) &= 2\lambda c. \end{aligned}$$

Da in diese Gleichungen nur die Verhältnisse $a : b : c$ der zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten, welche die Stelle von zwei Unbekannten vertreten, und die Unbekannte λ eingehen, so werden sich durch dieselben die drei Unbekannten bestimmen lassen. Um die genannten Substitutions-Coefficienten selbst zu bestimmen, wird die erste Gleichung (6) zu Hilfe zu nehmen sein.

Durch Differentiation der identischen Gleichung (3) nach den Variabeln Y oder Z erhält man in gleicher Weise:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi'(a') &= 2\lambda_1 a', & \varphi'(a'') &= 2\lambda_2 a'', \\ \varphi'(b') &= 2\lambda_1 b', & \varphi'(b'') &= 2\lambda_2 b'', \\ \varphi'(c') &= 2\lambda_1 c', & \varphi'(c'') &= 2\lambda_2 c'', \end{aligned}$$

Gleichungen von derselben Form als die Gleichungen (7), aus welchen mit Zuziehung der zweiten und dritten Gleichung (6) in gleicher Weise die Werthe der Unbekannten des Problemes sich ergeben. Wir werden uns daher begnügen können aus dem Systeme der Gleichungen (7), welches sich also darstellt:

$$(9) \quad \begin{aligned} (a_{00}-\lambda)a + a_{01}b + a_{02}c &= o, \\ a_{10}a + (a_{11}-\lambda)b + a_{12}c &= o, \\ a_{20}a + a_{21}b + (a_{22}-\lambda)c &= o, \end{aligned}$$

die Werthe der in ihnen enthaltenen Unbekannten zu bestimmen.

Bezeichnet man mit Δ den Ausdruck:

$$(10) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{00}-\lambda)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) + 2a_{12}a_{20}a_{01}$$
$$-(a_{00}-\lambda)a_{12}^2 - (a_{11}-\lambda)a_{20}^2 - (a_{22}-\lambda)a_{01}^2$$

und eliminirt aus (9) die Unbekannten a, b, c, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten λ die kubische Gleichung:

$$(11) \quad \Delta = o.$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung müssen gerade die Werthe der Unbekannten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sein, denn auch die beiden Systeme Gleichungen (8) führen auf dieselbe kubische Gleichung zurück.

Wollte man nach Feststellung der Werthe der Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$, von welcher das Problem der Hauptaxen abhängt, die Verhältnisse von $a : b : c$ aus zwei von den Gleichungen (9) bestimmen, so würde das zu einem unsymmetri-

schen Resultate führen. Wir werden deshalb die genannten Verhältnisse aus je zwei von den Gleichungen (9) feststellen, um die Resultate in symmetrischer Weise zu benutzen.

Wir führen zu dem genannten Zwecke die Bezeichnungen ein:

$$\Delta_{00} = \frac{d\Delta}{d a_{00}} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2,$$

$$\Delta_{11} = \frac{d\Delta}{d a_{11}} = (a_{22} - \lambda)(a_{00} - \lambda) - a_{20}^2,$$

$$\Delta_{22} = \frac{d\Delta}{d a_{22}} = (a_{00} - \lambda)(a_{11} - \lambda) - a_{01}^2,$$

(12)

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta}{d a_{12}} + \frac{d\Delta}{d a_{21}}\right) = a_{01}\, a_{02} - (a_{00} - \lambda)\, a_{12},$$

$$\Delta_{20} = \Delta_{02} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta}{d a_{20}} + \frac{d\Delta}{d a_{02}}\right) = a_{21}\, a_{10} - (a_{11} - \lambda)\, a_{20},$$

$$\Delta_{01} = \Delta_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta}{d a_{01}} + \frac{d\Delta}{d a_{10}}\right) = a_{20}\, a_{21} - (a_{22} - \lambda)\, a_{01}.$$

Alsdann erhalten wir aus (9) in der angedeuteten Weise:

$$a : b : c = \Delta_{00} : \Delta_{01} : \Delta_{02},$$

$$a : b : c = \Delta_{10} : \Delta_{11} : \Delta_{12},$$

$$a : b : c = \Delta_{20} : \Delta_{21} : \Delta_{22}.$$

Multipliciren wir die linken Theile dieser Gleichungen respective mit a, b, c, so erhalten wir durch Vergleichung mit ihren rechten Theilen nach Einführung eines zu bestimmenden Multiplicators μ:

(13) . . . .

$$\mu a^2 = \Delta_{00}, \qquad \mu bc = \Delta_{12},$$

$$\mu b^2 = \Delta_{11}, \qquad \mu ca = \Delta_{20},$$

$$\mu c^2 = \Delta_{22}, \qquad \mu ab = \Delta_{01}.$$

Der Multiplicator wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\mu = \Delta_{00} + \Delta_{11} + \Delta_{22},$$

welche aus der Addition der drei ersten Gleichungen (13) hervorgeht mit Berücksichtigung von (6). Der rechte Theil dieser Gleichung ist nichts anderes als der negative nach λ genommene Differentialquotient von Δ. Man hat daher:

$$\mu = -\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Es lässt sich aber dieser Factor μ noch bequemer durch die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$ ausdrücken. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Grösse λ in dem Ausdruck Δ als eine variable Grösse, so haben wir unter der Voraussetzung, dass $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ die Wurzeln der kubischen Gleichung seien, identisch:

$$-\Delta = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

und daher:

$$-\frac{d\Delta}{d\lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1).$$

Setzen wir in dieser Gleichung λ_0 für λ, wodurch die beiden letzten Glieder der Gleichung verschwinden, und hierauf, indem wir zu der ursprünglichen Bedeutung von λ, der Wurzel der kubischen Gleichung, zurückkehren, λ für λ_0, so erhalten wir:

$$(14) \; \ldots\ldots \quad \mu = -\frac{d\Delta}{d\lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Durch Multiplication zweier von den drei letzten Gleichungen (13) und Division durch die dritte wird:

$$\mu a^2 = \frac{\Delta_{20} \cdot \Delta_{01}}{\Delta_{12}}, \quad \mu b^2 = \frac{\Delta_{01} \cdot \Delta_{12}}{\Delta_{20}}, \quad \mu c^2 = \frac{\Delta_{12} \cdot \Delta_{20}}{\Delta_{01}},$$

woraus sich die gesuchten Werthe der Substitutions-Coefficienten ergeben:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta_{20} \cdot \Delta_{01}}{\mu \cdot \Delta_{12}}},$$

$$(15) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b = \sqrt{\frac{\Delta_{01} \cdot \Delta_{12}}{\mu \cdot \Delta_{20}}},$$

$$c = \sqrt{\frac{\Delta_{12} \cdot \Delta_{20}}{\mu \cdot \Delta_{01}}}.$$

Wir haben hier das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel-Grössen fortgelassen. Man könnte ebenso gut sämmtlichen Quadratwurzel-Grössen auch das negative Vorzeichen zuertheilen, jedoch nicht einer allein das entgegengesetzte Vorzeichen der übrigen. Denn unter diesen Umständen würde man durch Verbindung der Gleichungen (15) nicht die Gleichungen (13) erhalten, von welchen man ausging.

Die Substitutions-Coefficienten a', b', c' oder a'', b'', c'' erhält man aus diesen Ausdrücken (15), wenn man die Wurzeln λ und λ_1 oder λ und λ_2 der kubischen Gleichung mit einander vertauscht.

Eine kubische Gleichung kann entweder drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben. Hätte die kubische Gleichung $\Delta = o$, auf welche das Problem der Hauptaxen führt, zwei imaginäre Wurzeln, so würde für die Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen in diesem Falle die geometrische Interpretation der Substitutionen (1) ihre Geltung verlieren. Es ist daher folgender Satz von grosser Bedeutung:

Die kubische Gleichung $\Delta = o$, von welcher das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängt, hat nur reelle Wurzeln.

Cauchy beweiset diesen Satz, selbst in seiner Ausdehnung auf den Fall, dass die Zahl der Variabeln in dem vorgelegten algebraischen Probleme unbeschränkt ist, welcher Fall bei der Berechnung der secularen Störungen der Planeten eintritt, in folgender Weise.

Wenn die kubische Gleichung $\Delta = o$ eine Wurzel hätte von der Form: $\lambda = p + qi$, so müsste dieselbe Gleichung auch eine Wurzel haben $\lambda_1 = p - qi$. Demnach würden die Grössen a, b, c und a', b', c' die Form haben:

$$a = P + Qi, \quad a' = P - Qi,$$
$$b = P_1 + Q_1 i, \quad b' = P_1 - Q_1 i,$$
$$c = P_2 + Q_2 i, \quad c' = P_2 - Q_2 i.$$

Da aber zwischen den Grössen a, b, c und a', b', c' die Gleichung Statt findet:

$$aa' + bb' + cc' = o,$$

so hätte man:

$$P^2 + P_1^2 + P_2^2 + Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2 = o,$$

eine Gleichung, welche ausdrücken würde, dass die Summe der Quadrate von reellen Grössen gleich o sei, was unmöglich ist.

Das Bedenken, dass unter den Quadratwurzelzeichen der Ausdrücke (15) negative Grössen stehen könnten, wird beseitiget, wenn man erwägt, dass diese Grössen ihrer Zusammensetzung nach dasselbe Vorzeichen haben und dass $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Setzt man in dem Ausdrucke (10) Δ die Grösse λ gleich o, so geht derselbe in den Ausdruck D (13) der dreizehnten Vorle-

sung über, dessen Verschwinden die Bedingung ist, dass die Oberfläche zweiter Ordnung, um welche es sich handelt, keinen Mittelpunkt habe. Man kann daher sagen:

Die Bedingung, dass eine Oberfläche zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt habe, fällt zusammen mit der Bedingung, dass die kubische Gleichung, von welcher die Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung abhängen, eine Wurzel gleich o habe.

Wie beschaffen auch die Gleichung der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sei, im Falle die Oberfläche einen Mittelpunkt hat, wird man sie durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Mittelpunkt auf die Form bringen können, in welcher die Glieder der ersten Ordnung fehlen. Durch Veränderung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen kann man sie endlich zurückführen auf die Form:

$$(16) \quad \lambda x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \delta = o.$$

Hat dagegen die Oberfläche zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt, so kann man die Gleichung derselben durch Veränderung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen zurück führen auf die Form:

$$\lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o,$$

und durch nachträgliche Veränderung des Coordinatenanfangspunktes auf die Form:

$$(17) \quad \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x = o,$$

oder wenn $\lambda_1 = o$ ist, auf die Form:

$$(18) \quad \lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y = o.$$

Nach den Vorzeichen der in diesen Gleichungen enthaltenen Constanten unterscheidet man die verschiedenen Geschlechter der Oberflächen zweiter Ordnung.

Das Ellipsoid:

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = o.$$

Das imaginäre Ellipsoid:

$$(20) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = o.$$

Das Hyperboloid mit einer Mantelfläche:

$$(21) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = o.$$

Das Hyperboloid mit zwei Mantelflächen:

$$(22) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = o.$$

Der reelle Kegel:

$$(23) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = o.$$

Der imaginäre Kegel:

$$(24) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = o.$$

Die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt unterscheiden sich wie folgt:

Das elliptische Paraboloid:

$$(25) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \alpha x = o.$$

Das hyperbolische Paraboloid:

$$(26) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \alpha x = o.$$

Der parabolische Cylinder:

$$(26)^* \quad z^2 + \alpha x + \beta y = o.$$

Zu erwähnen ist noch der Fall, wenn in den Gleichungen (21) und (22) der Coefficient $\frac{1}{c^2}$ verschwindet. In diesem Falle stellen die genannten Gleichungen einen elliptischen Cylinder und einen hyperbolischen Cylinder dar.

Die Namen dieser Oberflächen sind hergenommen von den Kegelschnitten, in welchen die auf den Hauptaxen senkrecht stehenden Ebenen die Oberflächen schneiden. Man muss diese Schnittcurven studiren, um eine Anschauung zu erhalten von den verschiedenen namentlich aufgeführten Oberflächen zweiter Ordnung.

Man braucht die Gleichungen der Oberflächen zweiter Ordnung nicht auf diese Formen zurückzuführen, um die verschie-

denen Geschlechter zu erkennen. Denn da die kubische Gleichung $\Delta = o$, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen, nur reelle Wurzeln hat, so giebt die Entwickelung der kubischen Gleichung nach Potenzen der Unbekannten in ihr Aufschluss hierüber.

Haben nämlich alle Glieder der kubischen Gleichung dasselbe Vorzeichen, oder haben die auf einander folgenden Glieder abwechselnde Vorzeichen, so ist die Oberfläche eines der beiden Ellipsoide. Im entgegengesetzten Falle ist die Oberfläche eines der beiden Hyperboloide. Kommt noch die in der vierzehnten Vorlesung entwickelte Bedingung für den Kegel hinzu, so ist die Oberfläche in dem ersten Falle ein imaginärer Kegel, in dem zweiten Falle ein reeller Kegel. Haben die auf einander folgenden Glieder der quadratischen Gleichung, auf welche die kubische Gleichung $\Delta = o$ im Falle der Oberfläche ohne Mittelpunkt zurückführt, gleiche oder abwechselnde Vorzeichen, so ist die Oberfläche ein elliptisches Paraboloid, in jedem anderen Falle ein hyperbolisches Paraboloid. Für den parabolischen Cylinder reducirt sich die kubische Gleichung $\Delta = o$ auf eine Gleichung des ersten Grades, indem zwei Wurzeln derselben verschwinden.

So einfach auch die in (15) angegebenen Werthe der Substitutions-Coefficienten a, b, c sind, so nehmen sie doch eine wenig übersichtliche Gestalt an, wenn man die Werthe (12) und (14) substituirt. Wir führen deshalb statt der 6 Constanten in der Function $\varphi(x, y, z)$ 6 neue Constanten ein, indem wir setzen:

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{a_{01}\, a_{02}}{a_{12}} &= \beta_0^2, & \beta_0^2 - a_{00} &= \alpha_0, \\ \frac{a_{12}\, a_{10}}{a_{20}} &= \beta_1^2, & \beta_1^2 - a_{11} &= \alpha_1, \\ \frac{a_{20}\, a_{21}}{a_{01}} &= \beta_2^2, & \beta_2^2 - a_{22} &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Die drei ersten Ausdrücke können wir in der That gleich Quadraten setzen, weil dieselben ihrer Zusammensetzung nach dasselbe Vorzeichen haben. Hätten sie sämmtlich das negative Vorzeichen, so müsste man in der Gleichung der Oberfläche alle Glieder mit -1 multipliciren, um sie positiv zu machen.

Durch Einführung dieser neuen Constanten in (15) nehmen jene Ausdrücke die einfachere Gestalt an:

$$a = \frac{\beta_0 B}{\alpha_0 + \lambda},$$

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b = \frac{\beta_1 B}{\alpha_1 + \lambda},$$

$$c = \frac{\beta_2 B}{\alpha_2 + \lambda},$$

wenn man setzt,

$$(29) \quad \ldots\ldots \quad B = \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \lambda)(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}}.$$

Einen gleich grösseren Vortheil erlangt man durch Einführung der 6 neuen Constanten in die kubische Gleichung $\Delta = o$, welche dadurch folgende einfache Gestalt gewinnt:

$$(30) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\Delta}{(\alpha_0 + \lambda)(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)} = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda} - 1 = o.$$

Denn beachtet man den Wechsel des Vorzeichens des linken Theiles der Gleichung, wenn man λ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen lässt, indem man voraussetzt, dass:

$$(31) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2,$$

so sieht man die Wurzeln der kubischen Gleichung zwischen den Grenzen liegen:

(32) . . . die grösste Wurzel λ zwischen $+\infty$ und $-\alpha_2$,
die mittlere Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_2$ und $-\alpha_1$,
die kleinste Wurzel λ_2 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$.

Diese Feststellung der Grenzen von Jacobi, innerhalb welcher die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$ zu suchen sind, macht nicht allein den von Cauchy angegebenen Beweis der Realität der Wurzeln überflüssig, sondern ermöglichet auch ein tieferes Eingehen in einen Ausnahmefall, den wir bisher ganz unberücksichtiget gelassen haben. Wir haben den Fall im Auge, wenn zwei Wurzeln λ und λ_1 der kubischen Gleichung einander gleich sind.

In diesem Falle wird der Ausdruck (29) für B unendlich gross, und mit ihm auch die Ausdrücke (28), welche aus der Auflösung der linearen Gleichungen (9) hervorgegangen sind.

Ein solch unerwartetes Unendlichwerden der Werthe von Unbekannten in einem besonderen Falle pflegt ein Zeichen zu sein, dass die Werthe der Unbekannten aus Gleichungen berechnet worden sind, welche in dem besonderen Falle nicht unabhängig von einander sind, und sich daher zur Berechnung der Unbekannten nicht eignen. Wir werden in dem vorliegenden Falle diesem Umstande näher nachzuforschen haben.

Wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung λ und λ_1 einander gleich sind, so kann, wie aus der Bestimmung (32) der Grenzen der Wurzeln ersichtlich ist, die gleiche Wurzel nur den Werth haben $-\alpha_2$. Dieser Werth der Wurzel in die kubische Gleichung (30) gesetzt giebt:

$$\beta_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_0 - \alpha_2) = o.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf (31):

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Bemerkt man ferner, dass der in (30) dargestellte Ausdruck für Δ zwei gleiche Factoren $\lambda + \alpha_2$ haben muss, so sieht man, dass auch:

$$\alpha_1 = \alpha_0.$$

Die kubische Gleichung $\Delta = o$ hat daher nur unter der Bedingung zwei gleiche Wurzeln, dass:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2,$$

und die gleiche Wurzel ist:

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad \lambda = \lambda_1 = -\alpha_0 = -\alpha_1 = -\alpha_2.$$

Denn wenn die zwei kleinsten Wurzeln der kubischen Gleichung einander gleich sind, so kommt man mit Vertauschung der Wurzeln in gleicher Weise zu demselben Resultat.

Setzt man nun, um für den Fall zweier gleichen Wurzeln eine Einsicht zu gewinnen in die Natur der Gleichungen (9), aus welchen die Werthe der Substitutions-Coefficienten a, b, c in (28),

hervorgegangen sind, in die drei Gleichungen (9) der Reihe nach für λ die gleichen Werthe:

$$-\alpha_0, \quad -\alpha_1, \quad -\alpha_2,$$

so sieht man aus ihnen mit Berücksichtigung der drei letzten Gleichungen (27) folgende drei Gleichungen hervorgehen:

$$\beta_0^2 a + a_{01} b + a_{02} c = o,$$

$$a_{10} a + \beta_1^2 b + a_{12} c = o,$$

$$a_{20} a + a_{21} b + \beta_2^2 c = o.$$

Diese drei Gleichungen kommen aber durch Substitution der Werthe von β_0^2, β_1^2, β_2^2 aus (27) zurück auf die eine Gleichung:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a}{a_{12}} + \frac{b}{a_{20}} + \frac{c}{a_{01}} = o.$$

Ebenso reduciren sich in dem vorliegenden Falle die drei ersten Gleichungen (8) auf die eine Gleichung:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a'}{a_{12}} + \frac{b'}{a_{20}} + \frac{c'}{a_{01}} = o.$$

Die drei letzten Gleichungen (8) dagegen, welche der dritten ungleichen Wurzel λ_2 entsprechen, lassen sich auf die im allgemeinen Falle angegebene Weise behandeln. Aus ihnen ergeben sich schliesslich die Werthe der Substitutions-Coefficienten a'', b'', c'', die man aus (28) durch Vertauschung von λ mit λ_2 erhält, in der Form:

$$(36) \quad \ldots\ldots \begin{aligned} a'' &= \mu\beta_0, \quad b'' = \mu\beta_1, \quad c'' = \mu\beta_2 \\ a'' &= \frac{\nu}{a_{12}}, \quad b'' = \frac{\nu}{a_{20}}, \quad c'' = \frac{\nu}{a_{01}}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun auch in dem Falle ungleicher Wurzeln der kubischen Gleichung die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $a : b : c$ aus je zwei Gleichungen (7) und die Verhältnisse von $a' : b' : c'$ aus je zwei Gleichungen des ersten Systemes (8) berechnen konnten, so hört diese Berechnung doch auf in dem Falle, dass $\lambda = \lambda_1$, in welchem das System Gleichungen (7) sich auf die eine Gleichung (34), und das erste System Gleichungen (8) sich auf die eine Gleichung (35) reducirt. Die Formeln (28), in welchen diese Berechnung in dem vorliegenden Falle erzwungen ist, müssen deshalb illusorisch werden.

Wenn $\lambda = \lambda_1$, so hat man zur Bestimmung der 6 Substitutions-Coefficienten a, b, c und a', b', c' nur 5 Gleichungen, nämlich die Gleichungen (34) und (35) in Verbindung mit den drei Gleichungen:

$$(37) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ aa' + bb' + cc' &= o, \end{aligned}$$

welchen 5 Gleichungen man auf unendlich viele Arten genügen kann. Die Substitutions-Coefficienten a'', b'', c'' sind bestimmt durch die Gleichungen (36) in Verbindung mit der Gleichung:

$$(38) \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

Bei dieser Bestimmung geht aber die Function $\varphi(x, y, z)$ durch die Substionen (1) über in:

$$\varphi(x, y, z) = \lambda X^2 + \lambda Y^2 + \lambda_2 Z^2,$$

und die Oberfläche zweiter Ordnung, um welche es sich handelt, ist eine **Rotations-Oberfläche**. Denn führt man die Gleichung der Oberfläche durch Verlegung des rechtwinkligen Coordinatensystemes auf eine der unter (19) bis (26)* angegebenen Formen zurück, so sieht man, dass jede Ebene, welche senkrecht steht auf der, der ungleichen Wurzel entsprechenden, Coordinatenaxe, die Oberfläche in einem Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt in dieser Coordinatenaxe liegt.

Es ist hiernach die Bedingung, dass eine durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Punktcoordinaten gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotations-Oberfläche sei, folgende:

$$(39) \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2.$$

Wenn die kubische Gleichung $\Delta = o$ drei gleiche Wurzeln haben soll, so muss erstens die Bedingung (39) erfüllt werden, und da sich der durch (30) gegebene Ausdruck von Δ in drei gleiche Factoren zerlegen lassen muss, so folgt daraus noch die Bedingungsgleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = o,$$

welche in die drei Gleichungen zerfällt:

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = o,$$

oder, wenn man vermittelst (27) auf die ursprünglichen Constanten der Function $\varphi(x, y, z)$ zurückgeht:

$$(40) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{12} = a_{20} = a_{01} = o.$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass die Function $\varphi(x, y, z)$ schon die Form habe, auf welche sie in dem allgemeinen Falle zurückzuführen ist.

Die Gleichungen (39) und (40) sind die Bedingungen für die Kugel.

Wenn man schliesslich an Stelle der 6 Constanten in die Function $\varphi(x, y, z)$ die neuen Constanten durch (27) einführt, so stellt sich dieselbe also dar:

$$(41) \quad \ldots \quad \varphi(x, y, z) = (\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2).$$

Hätte man diese Form der Function $\varphi(x, y, z)$ statt der Form (4) gleich am Anfange gewählt, so würde man mit überraschender Einfachheit die Lösung des Problemes gefunden haben. Diese Lösung des Problemes der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung werden wir mit grösserer Ausführlichkeit wieder aufnehmen, nachdem wir zuvor als Einleitung dazu das leichtere Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung in analoger Weise behandelt haben werden.

Es sei noch erwähnt, dass das behandelte algebraische Problem sich als Maximums- oder Minimums-Aufgabe auffassen lässt:

Die Werthe der Variabeln zu bestimmen, welche eine gegebene homogene Function $\varphi(x, y, z)$ zu einem Maximum oder zu einem Minimum machen, wenn zwischen den Variabeln die Bedingungs-Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = o$ statt findet.

Denn, wenn man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung die, die Werthe der Variabeln bestimmenden, Gleichungen aufstellt, so wird man finden, dass sie auf die behandelten Gleichungen hinauskommen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung. Confocale Kegelschnitte und elliptische Coordinaten in der Ebene.

Das Problem der Hauptaxen einer Curve zweiter Ordnung in der Ebene, analytisch aufgefasst, besteht darin:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x^2 + y^2 = X^2 + Y^2,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi(x, y) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2$$

zu identischen Gleichungen machen, wenn $\varphi(x, y)$ eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung ist von den Variabeln x und y.

Wir werden, indem wir die Lösung dieses Problemes beabsichtigen, annehmen, dass die Function $\varphi(x, y)$ die Form habe:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x, y) = (\beta_0 x + \beta_1 y)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2),$$

auf welche Form sich die gegebene Function leicht zurückführen lässt.

Die Substitutionen, welche die Transformationen (1) und (2) bewirken, mit ihren Auflösungen seien:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{ll} x = a^0 X + a' Y, & X = a^0 x + b^0 y, \\ y = b^0 X + b' Y, & Y = a' x + b' y. \end{array}$$

Dass die Auflösungen der Substitutionen gerade die angegebene Form haben, geht hervor aus der Differentiation der durch die Substitutionen identischen Gleichung (1) nach X und Y.

Um nun die vier Coefficienten in den Substitutionen (4) zu bestimmen, werden wir die Grössen B_0 und B_1 einführen durch folgende lineare Gleichungen, deren Auflösungen wir zugleich beifügen:

$$(5) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \beta_0 &= a^0 B_0 + a' B_1, & B_0 &= a^0 \beta_0 + b^0 \beta_1, \\ \beta_1 &= b^0 B_0 + b' B_1, & B_1 &= a' \beta_0 + b' \beta_1. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen gehen aus der identischen Gleichung (2) durch Differentiation folgende Gleichungen hervor:

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} a^0 &= \frac{B_0 \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & b^0 &= \frac{B_0 \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, \\ a' &= \frac{B_1 \beta_0}{\alpha_0 + \lambda_1}, & b' &= \frac{B_1 \beta_1}{\alpha_1 + \lambda_1}. \end{aligned}$$

Denn differenzirt man die genannte Gleichung nach x und setzt $X = 1$, $Y = o$ und zugleich $x = a^0$, $y = b^0$, welches letztere durch die Substitutionen (4) geboten ist, so erhält man mit Rücksicht auf (5) die erste Gleichung (6) u. s. w.

Auf diese Weise haben wir die vier zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten ausgedrückt durch die vier neuen Unbekannten λ_0, λ_1, B_0, B_1, deren Werthe noch festzustellen sind.

Multipliciren wir zu diesem Zwecke die Horizontal-Gleichungen (6) mit β_0 und β_1 und addiren oder multipliciren wir die Vertical-Gleichungen (6) mit B_0 und B_1 und addiren, so erhalten wir:

$$(7) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} &= 1, & \frac{B_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha_0 + \lambda_1} &= 1, \\ \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_1} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_1} &= 1, & \frac{B_0^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha_1 + \lambda_1} &= 1. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen, von welchen jede nur eine Unbekannte λ_0 oder λ_1 enthält, dienen zum Beweise, dass diese Unbekannten die Wurzeln sind der folgenden quadratischen Gleichung in λ, die beiden anderen, dass α_0 und α_1 die Wurzeln sind der quadratischen Gleichung in α:

$$(8) \ldots\ldots \quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} = 1, \qquad \frac{B_0^2}{\alpha + \lambda_0} + \frac{B_1^2}{\alpha + \lambda_1} = 1.$$

Durch die erste von diesen Gleichungen sind also die beiden Unbekannten λ_0 und λ_1 als Wurzeln der Gleichung bestimmt.

Um auch die Werthe der beiden anderen Unbekannten B_0 und B_1 festzustellen, bemerken wir, dass identisch ist:

$$(9) \ldots \quad \begin{aligned} &(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)-\beta_0^2(\alpha_1+\lambda)-\beta_1^2(\alpha_0+\lambda)=(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1), \\ &(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1)-B_0^2(\alpha+\lambda_1)-B_1^2(\alpha+\lambda_0)=(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1). \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für λ entweder $-\alpha_0$ oder $-\alpha_1$ und für α entweder $-\lambda_0$ oder $-\lambda_1$, so erhält man:

$$(10) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &\beta_0^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)}{\alpha_0-\alpha_1}, \quad B_0^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_0)}{\lambda_0-\lambda_1}, \\ &\beta_1^2=\frac{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)}{\alpha_1-\alpha_0}, \quad B_1^2=\frac{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_0}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten von diesen Gleichungen geben die Werthe der beiden letzten Unbekannten B_0 und B_1.

Dass die Werthe der Substitutions-Coefficienten in (6) reelle sind, ersieht man erstens aus der quadratischen Gleichung (8), deren grösste Wurzel λ_0 zwischen ∞ und $-\alpha_1$ liegt und deren kleinste Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$ liegt, wenn $\alpha_0 > \alpha_1$; zweitens aus den in (10) gegebenen Werthen von B_0^2 und B_1^2, welche hiernach positiv sind.

Wenn man die vorangegangenen Formeln überblickt, so fällt der Dualismus derselben in die Augen. Dieser Dualismus lässt sich auf Grund der folgenden Betrachtungen zu einem Princip machen.

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen (5) mit x und y, und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (4):

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta_0 x+\beta_1 y = B_0 X + B_1 Y,$$

wodurch die Gleichung (2):

$$(12) \ldots\ldots \quad (\beta_0 x+\beta_1 y)^2-(\alpha_0 x^2+\alpha_1 y^2) = \lambda_0 X^2+\lambda_1 Y^2$$

übergeht in:

$$(13) \ldots\ldots \quad (B_0 X+B_1 Y)^2-(\lambda_0 X^2+\lambda_1 Y^2)=\alpha_0 x^2+\alpha_1 y^2.$$

Wenn demnach die Substitutionen (4) die Gleichungen (1) und (12) zu identischen Gleichungen machen, so machen auch die Auflösungen dieser Substitutionen die Gleichungen (1) und (13) zu identischen Gleichungen und umgekehrt. Daraus ergiebt sich nun folgende Regel zur Herleitung neuer Formeln:

Es ist erlaubt in allen Formeln, die aus den Substitutionen (4), welche die Gleichungen (1) und (2) zu identischen Gleichungen machen, hervorgehen, folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:

$$(14) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{l} ,, \; x, \; y, \; \alpha_0, \; \alpha_1, \; \beta_0, \; \beta_1, \; b^0, \; a' \\ ,, \; X, \; Y, \; \lambda_0, \; \lambda_1, \; B_0, \; B_1, \; a', \; b^0. \end{array}$$

Hiernach genügt es ein System Formeln wirklich zu entwickeln, weil ein zweites System nach dieser Regel von selbst folgt.

Zieht man die Gleichung (1), nachdem man sie mit einem Factor λ multiplicirt, hat von (12) ab, so erhält man:

$$(15) \ldots \left\{\beta_0 x + \beta_1 y\right\}^2 - \left\{(\alpha_0 + \lambda) x^2 + (\alpha_1 + \lambda) y^2\right\} = (\lambda_0 - \lambda) X^2 + (\lambda_1 - \lambda) Y^2.$$

Diese Gleichung, an die Stelle der Gleichung (2) gesetzt, lässt erkennen, dass es frei steht in allen zur Lösung des Problemes entwickelten Formeln zu verändern:

$$(16) \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} ,, \quad \alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \lambda_0, \quad \lambda_1, \\ ,, \text{ in } \alpha_0 + \lambda, \; \alpha_1 + \lambda, \; \lambda_0 - \lambda, \; \lambda_1 - \lambda. \end{array}$$

Durch diese Aenderungen werden die Grössen B_0 und B_1 nicht geändert. Es bilden daher auch die Formeln keine Ausnahme von der Regel, in welche die durch die Gleichungen (5) definirten Grössen B_0 und B_1 eingehen.

Um ein drittes Princip zur Herleitung neuer Formeln zu entwickeln, werden wir die reciproke Function $\Phi(u, v)$ der gegebenen Function $\varphi(x, y)$ feststellen dadurch, dass wir nach Vorschrift von (25) der siebenten Vorlesung setzen: $u = \frac{1}{2}\varphi'(x)$, $v = \frac{1}{2}\varphi'(y)$. Die Auflösungen sind dann nach (27) folgende: $x = \frac{1}{2}\Phi'(u)$, $y = \frac{1}{2}\Phi'(v)$ und die reciproke Function selbst wird: $\Phi(u, v) = \frac{1}{2}\left\{u\Phi'(u) + v\Phi'(v)\right\}$.

Die Ausführung der durch die Zeichensprache angedeuteten analytischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function giebt:

$$(17) \ldots\ldots \quad \Phi(u, v) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v\right)^2 - \left(\frac{u^2}{\alpha_0} + \frac{v^2}{\alpha_1}\right),$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} - 1.$$

Auf Grund von (19) und der darauf folgenden Erklärung in der achtzehnten Vorlesung hat man nun die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung:

$$(19) \ldots \varepsilon.\Phi(x,y) = \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}y\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1}\right) = \varepsilon\left(\frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1}\right).$$

Da man diese Gleichung an Stelle der Gleichung (2) des Problems nehmen kann, so sieht man, dass es erlaubt ist, in allen unseren Formeln folgende gleichzeitige Vertauschungen eintreten zu lassen:

$$(20) \ldots \begin{array}{l} \text{„} \quad \beta_0, \ \beta_1, \ \alpha_0, \ \alpha_1, \ \lambda_0, \ \lambda_1, \ B_0, \quad B_1, \\ \text{„ in } \dfrac{\beta_0}{\alpha_0}, \ \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}, \ \dfrac{\varepsilon}{\alpha_0}, \ \dfrac{\varepsilon}{\alpha_1}, \ \dfrac{\varepsilon}{\lambda_0}, \ \dfrac{\varepsilon}{\lambda_1}, \ \dfrac{\varepsilon B_0}{\lambda_0}, \ \dfrac{\varepsilon B_1}{\lambda_1}. \end{array}$$

Die angegebenen Veränderungen der Grössen B_0 und B_1 ergeben sich aus den Werthen (6) der Substitutions-Coefficienten, welche durch die vorangegangenen Veränderungen keine Aenderung erfahren dürfen.

Macht man in der Gleichung (19) die Veränderungen (16) und bemerkt, dass ε durch diese Veränderung übergeht in:

$$(21) \ldots\ldots\ldots E = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda} - 1,$$

so erhält man:

$$(22) \ldots \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda}x + \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda}y\right)^2 - E\left(\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}\right) = E\left(\frac{X^2}{\lambda_0-\lambda} + \frac{Y^2}{\lambda_1-\lambda}\right),$$

eine Gleichung, welche wie die vorhergehende (19) durch die Substitutionen (4), welche die Transformationen (1) und (2) bewirken, ebenfalls zu einer identischen Gleichung wird, welchen Werth auch λ habe.

Ein System eleganter Formeln, dienlich zu weiteren Transformationen, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden auf folgende Art:

Macht man die Auflösungen der Substitutionen (4) durch die Substitutionen zu identischen Gleichungen und vergleicht die Coefficienten gleicher Variabeln, so erhält man:

$$a^0a^0 + b^0b^0 = 1, \quad a'a' + b'b' = 1, \quad a^0a' + b^0b' = 0.$$

Durch Einsetzen der Werthe (6) der Substitutions-Coefficienten gehen diese Gleichungen über in:

$$(23) \ldots \quad \begin{aligned} &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2} = \frac{1}{B_0^2}, \\ &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^2} = \frac{1}{B_1^2}, \\ &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)} = o. \end{aligned}$$

Macht man in den beiden ersten Gleichungen (7) die Aenderungen (20) und hierauf die Aenderung (16), so erhält man:

$$(24) \ldots \quad \begin{aligned} &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda)} = \frac{E}{\lambda_0-\lambda}, \\ &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda)} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda)} = \frac{E}{\lambda_1-\lambda}. \end{aligned}$$

Differenzirt man diese in λ identischen Gleichungen, und setzt hierauf für λ entweder λ_0 oder λ_1, so erhält man mit Rücksicht auf (23) und (7):

$$(25) \ldots \quad \begin{aligned} &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)^2} = \frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)B_1^2}, \\ &\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_0)^2} = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)B_0^2}. \end{aligned}$$

Wenn man die Grössen B_0 und B_1 als Function von α_0, α_1, λ_0, λ_1 betrachtet, wie sie durch (10) ausgedrückt sind, und die Logarithmen dieser Ausdrücke partiell differenzirt nach λ_0 und λ_1, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{2}{B_0}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0} &= \frac{1}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}, \\ \frac{2}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1} &= \frac{1}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}, \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke gehen aus der also dargestellten ersten Gleichung (9):

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda} - 1 = -\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}{(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)}$$

hervor, wenn man diese in λ identische Gleichung zweimal nach λ differenzirt und nach der Differentiation für λ setzt entweder λ_0 oder λ_1, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3} &= \frac{1}{B_0^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}\right\}, \\ \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3} &= \frac{1}{B_1^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}\right\}. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen mit den beiden vorher abgeleiteten Gleichungen ergiebt endlich:

$$
(26) \ldots\ldots \quad
\begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^3} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^3} &= \frac{2}{B_0^3}\frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0}, \\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^3} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^3} &= \frac{2}{B_1^3}\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1}.
\end{aligned}
$$

In gleicher Weise, als das behandelte algebraische Problem geometrisch aufgefasst werden kann, so kann man auch einzelnen von den entwickelten Formeln eine geometrische Bedeutung unterlegen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke β_0 und β_1 als die variabeln rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in der Ebene, so stellt die erste Gleichung (8) einen auf seine Hauptaxen bezogenen Kegelschnitt dar, und, wenn man in jener Gleichung λ variiren lässt, ein ganzes System Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten, weshalb sie confocale Kegelschnitte genannt werden. Betrachten wir dagegen β_0 und β_1 als die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes in der Ebene, so liefern die beiden ersten Gleichungen (7) den Beweis, dass durch jeden beliebig gegebenen Punkt in der Ebene nur zwei mit einem gegebenen Kegelschnitt confocale Kegelschnitte hindurchgehen. Aber auch über die Natur dieser Kegelschnitte können wir uns Gewissheit verschaffen, nachdem wir in dem Vorhergehenden die Grenzen der Wurzeln λ_0 und λ_1 festgestellt haben. Da nämlich beide Nenner in der ersten Gleichung (7) positiv, in der zweiten der erste Nenner positiv, der andere negativ sind, so muss der eine Kegelschnitt eine Ellipse, der andere eine Hyperbel sein.

Errichtet man in dem beliebig gegebenen Punkte, durch welchen die beiden confocalen Kegelschnitte gehen, Normalen an die beiden Kegelschnitte, so verhalten sich die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Ellipse mit den Coordinatenaxen bildet wie:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0},$$

und für die Hyperbel hat man:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_1} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_1}.$$

Die dritte Gleichung (23) dient zum Beweise, dass diese Normalen auf einander senkrecht stehen, oder, was dasselbe sagt, dass die beiden confocalen Kegelschnitte sich senkrecht schneiden. Diese Bemerkungen fassen wir kurz zusammen wie folgt:

Confocale Kegelschnitte derselben Art schneiden sich nicht in reellen Punkten. Confocale Kegelschnitte verschiedener Art schneiden sich immer in reellen Punkten senkrecht. In jedem Punkte der Ebene schneiden sich zwei zu einem in der Ebene gegebenen Kegelschnitte confocale Kegelschnitte.

Man erhält aus der Gleichung des Tangentenkegels einer Oberfläche zweiter Ordnung (20) der vierzehnten Vorlesung die Gleichung des Tangentenpaares an den Kegelschnitt, in welchem die Oberfläche von einer der Coordinatenebenen geschnitten wird, wenn man die auf dieser Ebene senkrechten Coordinaten gleich o setzt. Bildet man nach dieser Vorschrift die Gleichung des Tangentenpaares, welches von einem durch seine Coordinaten β_0, β_1 gegebenen Punkte an den durch die erste Gleichung (8) gegebenen Kegelschnitt gelegt ist, so erhält man:

$$(27) \ldots \left\{\frac{\beta_0 x}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1 y}{\alpha_1+\lambda} - 1\right\}^2 - E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1+\lambda} - 1\right\} = o.$$

Die Hauptaxen dieses Tangentenpaares sind das Linienpaar, welches die von dem Tangentenpaar eingeschlossenen Winkel halbirt. Die Glieder der zweiten Ordnung in dieser Gleichung bilden gerade den Ausdruck (22), der zugleich mit (1) durch die Substitutionen (4) transformirt wurde. Damit hat aber auch das Problem der Hauptaxen des genannten Tangentenpaares seine algebraische, sowie seine geometrische Lösung gefunden, welche letztere sich so ausdrücken lässt:

Die Winkel, welche das von einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt gelegte Tangentenpaar bildet, werden halbirt von den beiden durch den gegebenen Punkt gelegten, zu dem gegebenen Kegelschnitte confocalen, Kegelschnitten.

Wenn ein Punkt in der Ebene durch seine rechtwinkligen Coordinaten β_0, β_1 bestimmt ist, so ist derselbe auch bestimmt als Schnittpunkt der beiden mit einem gegebenen Kegelschnitte (8)

confocalen Kegelschnitte, welche durch ihn gehen. Es schneiden sich zwar die beiden confocalen Kegelschnitte in vier gegen die Coordinatenaxen symmetrisch gelegenen Punkten; allein mit passender Beschränkung, zum Beispiel, dass der Punkt nur liegen soll innerhalb des von den positiven Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkels, wird der Punkt durch die beiden durch ihn gehenden confocalen Kegelschnitte unzweideutig bestimmt sein. Man kann daher die beiden confocalen Kegelschnitte als die den Punkt bestimmenden Coordinaten ansehen. Die ihnen entsprechenden Werthe von λ gleich λ_0 und λ_1 führen den Namen der elliptischen Coordinaten des Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten sind β_0 und β_1.

Die beiden ersten Gleichungen (7), in welchen man α_0 und α_1 als constante Grössen zu betrachten hat, sind die Relationen zwischen den variabeln rechtwinkligen und den variabeln elliptischen Coordinaten. Ihre Auflösungen (10) drücken die rechtwinkligen durch die elliptischen Coordinaten aus.

Es genügt aber nicht die Ausdrücke der rechtwinkligen Coordinaten durch die elliptischen zu kennen, in vielen Fällen braucht man auch die Differentiale der einen durch die anderen. Differenzirt man deshalb die beiden ersten Gleichungen (7), indem man die rechtwinkligen Coordinaten gleich wie die elliptischen als Variabeln betrachtet, so erhält man mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{d\lambda_0}{2B_0^2} = \frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0},$$

$$\frac{d\lambda_1}{2B_1^2} = \frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda_1},$$

und hieraus mit Berücksichtigung von (6):

$$\text{(28)} \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{2B_0} &= a^0 d\beta_0 + b^0 d\beta_1, \\ \frac{d\lambda_1}{2B_1} &= a' d\beta_0 + b' d\beta_1. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Substitutionen (4), so sieht man, dass, wenn die Variabeln x, y die Werthe annehmen $x = d\beta_0$, $y = d\beta_1$, die anderen Variabeln die Werthe erhalten: $X = \frac{d\lambda_0}{2B_0}$, $Y = \frac{d\lambda_1}{2B_1}$. Es ist deshalb erlaubt, in den Substitutionen (4) und in allen Gleichungen,

welche diese Substitutionen zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Veränderungen eintreten zu lassen:

$$(29) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{matrix} ,, & x, & y, & X, & Y \\ ,, \text{ in } & d\beta_0, & d\beta_1, & \dfrac{d\lambda_0}{2B_0}, & \dfrac{d\lambda_1}{2B_1}. \end{matrix}$$

Von den durch diese Veränderungen aus den angegebenen Formeln hervorgehenden Differentialformeln heben wir die erste hervor, welche das Quadrat des Differentiales ds des Bogens irgend einer Curve ausdrückt:

$$(30) \ldots\ldots \; ds^2 = d\beta_0^2 + d\beta_1^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{B_1^2}\right\}.$$

Wenn wir der Bequemlichkeit wegen setzen:

$$(31) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} L_0^2 &= (\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda_0), \\ -L_1^2 &= (\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda_1), \end{aligned}$$

so geht (30) mit Rücksicht auf (10) über in:

$$(32) \ldots\ldots\ldots\ldots \; ds^2 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{L_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{L_1^2}\right\}.$$

Hieraus erhalten wir das Differentiale des Bogens des Kegelschnittes (8), von dem wir annehmen wollen, dass er eine Ellipse sei, indem wir $\lambda_0 = \lambda$, gleich einer Constanten setzen, deren Werth zwischen $-\alpha_1$ und ∞ liegt:

$$(33) \ldots\ldots\ldots\ldots \; ds = \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1},$$

und hieraus ergiebt sich die Länge s des Bogens der Ellipse (8):

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots \; s = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1},$$

begrenzt von den beiden confocalen Hyperbeln, welchen die Werthe $\lambda_1 = \lambda_1^0$ und $\lambda_1 = \lambda_1'$ der elliptischen Coordinaten entsprechen. Nimmt man für die Grenzen des Integrals die Hyperbelgrenzen, so erhält man den vierten Theil des Umfanges U der genannten Ellipse, und demnach:

$$(35) \ldots\ldots\ldots \quad U = 2\int\limits_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \sqrt{(\lambda - \lambda_1)} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Die Bogenelemente $d a_0$ und $d a_1$ der confocalen Ellipsen und Hyperbeln erhalten wir aus (32):

$$(36) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} d a_0 &= \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_1}{L_1}, \\ d a_1 &= \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{2} \cdot \frac{d\lambda_0}{L_0}, \end{aligned}$$

indem wir einmal λ_0, das andere Mal λ_1 constant setzen. Demnach wird, weil alle confocalen Ellipsen alle confocalen Hyperbeln senkrecht schneiden, das Element der von zwei confocalen Ellipsen und von zwei confocalen Hyperbeln eingeschlossenen Fläche:

$$(37) \ldots\ldots \quad d a_0 \,.\, d a_1 = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)}{4} \, \frac{d\lambda_0}{L_0} \, \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Durch doppelte Integration und Ausdehnung der Grenzen über sämmtliche von der gegebenen Ellipse (8) eingeschlossenen confocalen Ellipsen und über sämmtliche confocale Hyperbeln erhält man den vierten Theil des Flächeninhaltes I der gegebenen Ellipse. Man hat demnach:

$$(38) \ldots\ldots\ldots \quad I = \int\limits_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \int\limits_{-\alpha_1}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda_1) \, \frac{d\lambda_0}{L_0} \, \frac{d\lambda_1}{L_1}.$$

Einen einfacheren Ausdruck für den Flächeninhalt der gegebenen Ellipse (8) erhält man auf folgende Art. Man beschreibe um den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse mit dem Radius der grossen halben Axe einen Kreis:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_0 + \lambda} = 1.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (8) der Ellipse zeigt, dass die Ordinate des Kreises sich zu der, derselben Abscisse entsprechenden, Ordinate der Ellipse verhält wie:

$$\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)} : \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}.$$

In demselben Verhältnisse stehen auch die Flächenelemente k und i des Kreises und der Ellipse, welche begrenzt werden von zwei unendlich nahen Ordinaten. Man hat daher:

$$i = \frac{k \cdot \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}}{\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}} .$$

Nimmt man die Summe aller Flächenelemente des Kreises und der Ellipse: $\Sigma k = K$ und $\Sigma i = I$, so erhält man:

$$I = \frac{K \cdot \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)}}{\sqrt{(\alpha_0 + \lambda)}} .$$

Da aber der Flächeninhalt K des Kreises ist: $K = \pi (\alpha_0 + \lambda)$, so hat man:

$$(39) \ldots\ldots\ldots I = \pi \sqrt{(\alpha_0 + \lambda)} \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)},$$

und daher mit Rücksicht auf (38):

$$(40) \ldots\ldots \pi \sqrt{(\alpha_0 + \lambda)} \sqrt{(\alpha_1 + \lambda)} = \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda_1) \frac{d\lambda_0}{L_0} \frac{d\lambda_1}{L_1},$$

welche Gleichung nach dem Vorhergehenden bewiesen ist für alle zwischen $-\alpha_1$ und ∞ gelegenen Werthe von λ und unter der Voraussetzung, dass $\alpha_0 > \alpha_1$.

Von den Differential-Formeln, welche aus den in dem ersten Theile der gegenwärtigen Vorlesung entwickelten Formeln durch die Veränderung (29) hervorgehen, heben wir ferner die, der Gleichung (22) entsprechende, Formel hervor:

$$(41) \ldots \left\{ \frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1 + \lambda} \right\}^2 - E \left\{ \frac{d\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} \right\} = \frac{E}{4} \left\{ \frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_0 - \lambda) B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda) B_1^2} \right\},$$

um auch ihr eine geometrische Bedeutung unterzulegen.

Zu diesem Zwecke erinnern wir an die Gleichung (27) des von dem Punkte β_0, β_1 an den gegebenen Kegelschnitt (8) gelegten Tangentenpaares. Verlegt man mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen den Anfangspunkt des Coordinatensystemes in den genannten Punkt, so wird die Gleichung des Tangentenpaares rücksichtlich dieses Coordinatensystemes:

$$\left\{ \frac{\beta_0 x}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1 y}{\alpha_1 + \lambda} \right\}^2 - E \left\{ \frac{x^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1 + \lambda} \right\} = o,$$

woraus die Differentialgleichung desselben Tangentenpaares rücksichtlich des ursprünglichen Coordinatensystems hervorgeht:

$$(42) \ldots \left\{\frac{\beta_0 d\beta_0}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1 d\beta_1}{\alpha_1+\lambda}\right\}^2 - E\left\{\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{d\beta_1^2}{\alpha_0+\lambda}\right\}=o,$$

und in elliptische Coordinaten durch (41) übertragen:

$$(43) \ldots\ldots\ldots \frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_0-\lambda)B_0^2}-\frac{d\lambda_1^2}{(\lambda-\lambda_1)B_1^2}=o.$$

Zerlegt man diese Gleichung in ihre Factoren und setzt jeden einzelnen gleich o, so erhält man die Differential-Gleichungen der von dem Punkte β_0, β_1 an die gegebene Ellipse (8) gelegten Tangenten:

$$\frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,B_0}-\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,B_1}=o,$$

$$\frac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,B_0}+\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,B_1}=o,$$

oder, wenn man die übersichtlichere Bezeichnung (31) einführt:

$$(44) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,L_0}-\dfrac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}=o, \\[2ex] \dfrac{d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}\,.\,L_0}+\dfrac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}=o. \end{cases}$$

Um nun die Länge s der Tangente auszudrücken, setzen wir in Gleichung (32) den Werth von $d\lambda_0$ aus einer der Gleichungen (44) ein, wodurch wir für jede der beiden Tangenten erhalten:

$$ds=\frac{(\lambda_0-\lambda_1)\,.\,d\lambda_1}{2\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}$$

oder:

$$ds=\frac{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,d\lambda_1}{2\,L_1}+\frac{(\lambda_0-\lambda)\,.\,d\lambda_1}{2\sqrt{(\lambda-\lambda_1)}\,.\,L_1}.$$

Bezeichnen wir aber mit s_0 die Länge der ersten Tangente (44) und mit s_1 die Länge der zweiten Tangente von den Punkten an gerechnet, wo sie die gegebene Ellipse (8) berühren, bis zu ihrem Schnittpunkte β_0, β_1, oder in elliptischen Coordinaten λ_0, λ_1, so erhalten wir mit Berücksichtigung ihrer Differentialgleichungen (44):

$$(45) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} ds_0 &= \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2L_1}\, d\lambda_1 + \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0, \\ ds_1 &= \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2L_1}\, d\lambda_1 - \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Integration:

$$(46) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} s_0 &= \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2L_1}\, d\lambda_1 + \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0. \\ s_1 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda'_1} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2L_1}\, d\lambda_1 - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0, \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, dass λ_1^0 und λ'_1 die Werthe der elliptischen Coordinate λ_1 seien, welche den Berührungspunkten der Tangenten der Ellipse (8) entsprechen.

Durch Addition der beiden Gleichungen (46) erhält man:

$$(47) \ldots \quad s_0 + s_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda'_1} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}}{2L_1}\, d\lambda_1 + 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0,$$

und wenn man hiervon den von den beiden Berührungspunkten begrenzten, durch (34) ausgedrückten, Bogen der gegebenen Ellipse (8) abzieht:

$$(48) \ldots \quad s_0 + s_1 - s = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}}{2L_0}\, d\lambda_0$$

Da dieser Ausdruck aber die zweite elliptische Coordinate λ_1 des Punktes β_0, β_1 nicht enthält, so bleibt er unverändert für alle Punkte β_0, β_1, für welche λ_0 eine constante Grösse ist, das heisst, für alle auf einer Ellipse liegenden Punkte, welche mit der gegebenen Ellipse confocal ist. Dem hierdurch bewiesenen Satze können wir folgenden Ausdruck geben:

Wenn man um eine gegebene Ellipse einen geschlossenen Faden schlingt, und diesen durch einen Stift in der Ebene der Ellipse spannt, so beschreibt

der Stift bei seiner Bewegung eine mit der gegebenen Ellipse confocale Ellipse.

Betrachten wir schliesslich noch den Grenzfall, wenn der Punkt β_0, β_1 der gegebenen Ellipse (8) unendlich nahe rückt. In diesem Falle werden alle Differenzen $\lambda_1' - \lambda_1^0$ und $\lambda_0 - \lambda$ der Grenzen der beiden Integrale in (47) unendlich kleine Grössen und mit ihnen auch die Integrale. Da aber der Factor $\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$ unter dem zweiten Integralzeichen für alle zwischen den Grenzen des Integrals liegenden Werthe von λ_0 ebenfalls unendlich klein wird, während der entsprechende Factor $\sqrt{(\lambda - \lambda_1)}$ des ersten Integrales für alle Werthe von λ_1 zwischen den Grenzen des Integrals endlich bleibt, so sieht man, dass in dem Grenzfalle das zweite Integral gegen das erste verschwindet, und dass die Ausdrücke (47) und (34) in einander übergehen.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Das Problem der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung und elliptische Raumcoordinaten.

Man hat am Ende der zwanzigsten Vorlesung gesehen, wie das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung rein algebraisch sich so ausdrücken lässt:

Die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

(1) . . . . $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$,

(2) . . . . $\varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$,

zu identischen Gleichungen machen, wenn die Function $\varphi(x, y, z)$ gegeben ist in der Form:

(3) . . . $\varphi(x, y, z) = (\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2)$.

Indem wir dieses Problem wieder aufnehmen, werden wir annehmen, dass die linearen Substitutionen, welche die Transformationen (1) und (2) bewirken, mit ihren Auflösungen seien:

$$(4)\ldots\quad \begin{aligned} x &= a^0X + a'Y + a''Z, & X &= a^0x + b^0y + c^0z,\\ y &= b^0X + b'Y + b''Z, & Y &= a'x + b'y + c'z,\\ z &= c^0X + c'Y + c''Z, & Z &= a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Dass die aufgelösten Substitutionen gerade die angegebene Form haben, folgt, wie man in dem zweiten Theile der neunzehnten Vorlesung gesehen hat, aus der durch die Substitutionen identischen Gleichung (1). Aus dieser Gleichung gehen aber alle Formeln hervor, die wir in dem zweiten Theile der genannten Vorlesung entwickelt haben. Es genügt hier auf sie nur hinzuweisen mit der Bemerkung, dass man überall für a, b, c zu setzen hat a^0, b^0, c^0, um für unser Problem gültige Formeln zu erhalten.

Die Werthe der 9 Substitutionscoefficienten werden wir bestimmen, indem wir die drei Grössen B_0, B_1, B_2 einführen, welche durch die folgenden drei Gleichungen oder durch ihre Auflösungen definirt sind:

$$(5)\ldots\quad \begin{aligned} \beta_0 &= a^0B_0 + a'B_1 + a''B_2, & B_0 &= a^0\beta_0 + b^0\beta_1 + c^0\beta_2,\\ \beta_1 &= b^0B_0 + b'B_1 + b''B_2, & B_1 &= a'\beta_0 + b'\beta_1 + c'\beta_2,\\ \beta_2 &= c^0B_0 + c'B_1 + c''B_2, & B_2 &= a''\beta_0 + b''\beta_1 + c''\beta_2. \end{aligned}$$

Alsdann gehen aus der durch die Substitutionen identischen Gleichung (2) folgende 9 Gleichungen hervor:

$$(6)\ldots\ldots\quad \begin{aligned} a^0 &= \frac{\beta_0B_0}{\alpha_0+\lambda_0}, & b^0 &= \frac{\beta_1B_0}{\alpha_1+\lambda_0}, & c^0 &= \frac{\beta_2B_0}{\alpha_2+\lambda_0},\\ a' &= \frac{\beta_0B_1}{\alpha_0+\lambda_1}, & b' &= \frac{\beta_1B_1}{\alpha_1+\lambda_1}, & c' &= \frac{\beta_2B_1}{\alpha_2+\lambda_1},\\ a'' &= \frac{\beta_0B_2}{\alpha_0+\lambda_2}, & b'' &= \frac{\beta_1B_2}{\alpha_1+\lambda_2}, & c'' &= \frac{\beta_2B_2}{\alpha_2+\lambda_2}. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen erhält man, wenn man die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung (2) partiell nach x differenzirt und hierauf $X=1$, $Y=0$, $Z=0$, und zugleich $x=a^0$, $y=b^0$, $z=c^0$ setzt. In gleicher Weise erhält man die übrigen Gleichungen.

Die Substitutionscoefficienten sind in den Gleichungen (6) durch die sechs unbekannten Grössen B_0, B_1, B_2, λ_0, λ_1, λ_2 ausgedrückt. Um die Werthe der letzteren festzustellen, dienen die Gleichungen:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{B_2^2}{\alpha_0+\lambda_2}=1,$$

$$(7)\quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_1}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_1}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_1}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha_1+\lambda_1}+\frac{B_2^2}{\alpha_1+\lambda_2}=1,$$

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_2}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_2}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_2}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha_2+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha_2+\lambda_1}+\frac{B_2^2}{\alpha_2+\lambda_2}=1,$$

welche aus (6) dadurch hervorgehen, dass man die Horizontal-Gleichungen multiplicirt mit β_0, β_1, β_2 und mit Berücksichtigung von (5) addirt, oder, dass man die Verticalgleichungen multiplicirt mit B_0, B_1, B_2 und addirt.

Die beiden ersten Gleichungen drücken aus, dass die Unbekannten λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln sind folgender in λ kubischen Gleichung, die drei anderen, dass die bekannten Grössen α_0, α_1, α_2 sich als die Wurzeln folgender kubischen Gleichung in α betrachten lassen:

$$(8)\;.\,.\;\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}=1, \quad \frac{B_0^2}{\alpha+\lambda_0}+\frac{B_1^2}{\alpha+\lambda_1}+\frac{B_2^2}{\alpha+\lambda_2}=1.$$

Nach Feststellung der Wurzeln der ersten cubischen Gleichung (8) bleibt noch übrig die Werthe der Quadrate der letzten Unbekannten B_0, B_1, B_2 durch Auflösung des zweiten Systemes Gleichungen (7) zu berechnen. Diese Berechnung geschieht am einfachsten in folgender Art:

Da λ_0, λ_1, λ_2 und α_0, α_1, α_2 die Wurzeln der kubischen Gleichungen (8) sind, so hat man identisch:

$$(9)\;.\,.\,.\,.\quad \begin{aligned}
&(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)-\beta_0^2(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)\\
&\quad-\beta_1^2(\alpha_2+\lambda)(\alpha_0+\lambda)-\beta_2^2(\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)\\
&\quad=(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),\\
&(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)-B_0^2(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)\\
&\quad-B_1^2(\alpha+\lambda_2)(\alpha+\lambda_0)-B_2^2(\alpha+\lambda_0)(\alpha+\lambda_1)\\
&\quad=(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2).
\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für λ nach einander $-\alpha_0$, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, und für α ebenso $-\lambda_0$, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, so erhält man:

$$\beta_0^2 = \frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)}, \quad B_0^2 = \frac{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)},$$

$$(10)\;\beta_1^2 = \frac{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_0)}, \quad B_1^2 = \frac{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_0)},$$

$$\beta_2^2 = \frac{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)}, \quad B_2^2 = \frac{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

Aus der in λ kubischen Gleichung (8) ersieht man, wenn man voraussetzt:

$$(11)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2,$$

dass, welche Werthe auch die Grössen β_0, β_1, β_2 haben mögen, die Wurzeln jener Gleichung liegen:

die grösste Wurzel λ_0 zwischen $+\infty$ und $-\alpha_2$,

(12) . . die mittlere Wurzel λ_1 zwischen $-\alpha_2$ und $-\alpha_1$,

die kleinste Wurzel λ_2 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$.

Deshalb sind auch die Ausdrücke B_0^2, B_1^2, B_2^2 in (10) sämmtlich positiv und die Ausdrücke (6) der Substitutionscoefficienten reell.

Von den angeführten Formeln braucht man nur die eine Hälfte aufzustellen, die andere ergiebt sich von selbst nach dem Prinzipe, welches wir jetzt entwickeln wollen.

Durch Multiplication der drei ersten Gleichungen (5) mit x, y, z und Addition erhält man mit Rücksicht auf (4):

$$(13)\;\ldots\ldots \quad \beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z = B_0 X + B_1 Y + B_2 Z.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung geht aber die Gleichung (2):

$$(14)\;\ldots(\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

über in:

$$(15)\ldots(B_0 X + B_1 Y + B_2 Z)^2 - (\lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2.$$

Wenn demnach die Substitutionen (4) die Gleichungen (1) und (14) zu identischen Gleichungen machen, und die Substitu-

tionen dadurch bestimmt sind, so machen die Auflösungen dieser Substitutionen die Gleichungen (1) und (15) zu identischen Gleichungen und sind ebenfalls bestimmt. Daraus ergiebt sich aber folgende Regel zur Ableitung neuer Formeln:

Es ist erlaubt in allen Formeln, die aus den Substitutionen (4) hervorgehen, welche die Gleichungen (1) und (2) zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen.

$$(16) \ldots \quad \begin{array}{l} ,, \; x,\; y,\; z; \quad \alpha_0,\, \alpha_1,\, \alpha_2; \quad \beta_0,\, \beta_1,\, \beta_2; \quad b^0,\, c^0,\, c'. \\ ,, \; X,\; Y,\; Z; \quad \lambda_0,\, \lambda_1,\, \lambda_2; \quad B_0,\, B_1,\, B_2; \quad a',\, a'',\, b''. \end{array}$$

Zieht man die mit einem willkürlichen Factor λ multiplicirte Gleichung (1) ab von (14), so erhält man:

$$(17) \ldots \quad \begin{array}{l} \left\{\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z\right\}^2 - \left\{(\alpha_0+\lambda)x^2 + (\alpha_1+\lambda)y^2 + (\alpha_2+\lambda)z^2\right\} \\ = (\lambda_0-\lambda)X^2 + (\lambda_1-\lambda)Y^2 + (\lambda_2-\lambda)Z^2. \end{array}$$

Wenn man diese Gleichung an die Stelle der Gleichung (2) des Problemes setzt, so sieht man, dass man in allen zur Lösung des Problemes entwickelten Formeln folgende gleichzeitige Veränderungen eintreten lassen kann:

$$(18) \ldots \quad \begin{array}{l} ,, \; \alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2; \quad \lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2; \\ ,, \text{ in } \alpha_0+\lambda,\; \alpha_1+\lambda,\; \alpha_2+\lambda; \;\; \lambda_0-\lambda,\; \lambda_1-\lambda,\; \lambda_2-\lambda. \end{array}$$

Ein drittes Prinzip, nach welchem die zur Auflösung des Problemes dienlichen Formeln verändert werden können, ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

Setzt man, um die reciproke Function $\Phi(u, v, w)$ der in (3) gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ zu bestimmen, nach Vorschrift von (25) der siebenten Vorlesung:

$$u = \tfrac{1}{2}\varphi'(x), \quad v = \tfrac{1}{2}\varphi'(y), \quad w = \tfrac{1}{2}\varphi'(z),$$

so erhält man nach (27) die Auflösungen dieser linearen Gleichungen:

$$x = \tfrac{1}{2}\Phi'(u), \quad y = \tfrac{1}{2}\Phi'(v), \quad z = \tfrac{1}{2}\Phi'(w),$$

und die reciproke Function selber wird:

$$\Phi(u, v, w) = \tfrac{1}{2}\left\{u\,\Phi'(u) + v\,\Phi'(v) + w\,\Phi'(w)\right\}.$$

Die hier angedeuteten analytischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function $\Phi(u, v, w)$ führen wir am einfachsten in folgender Art durch.

Wir setzen, um abzukürzen:

$$\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z = B,$$

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} - 1 = \varepsilon.$$

Alsdann sind die drei Gleichungen aufzulösen:

$$u = \tfrac{1}{2}\varphi'(x) = \beta_0 B - \alpha_0 x,$$

$$v = \tfrac{1}{2}\varphi'(y) = \beta_1 B - \alpha_1 y,$$

$$w = \tfrac{1}{2}\varphi'(z) = \beta_2 B - \alpha_2 z.$$

Multiplicirt man dieselben mit $\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ und addirt, so erhält man:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w = (\varepsilon + 1) B - B,$$

und hieraus:

$$B = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w\right).$$

Man erhält demnach die gesuchten Auflösungen, wenn man in den so dargestellten drei Gleichungen:

$$x = \frac{\beta_0}{\alpha_0} B - \frac{1}{\alpha_0} u,$$

$$y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} B - \frac{1}{\alpha_1} v,$$

$$z = \frac{\beta_2}{\alpha_2} B - \frac{1}{\alpha_2} w$$

für B den zuletzt gegebenen Werth setzt. Durch Multiplication dieser drei Gleichungen mit u, v, w, und Addition derselben erhält man dann die gesuchte reciproke Function:

$$(19) \ldots \Phi(u, v, w) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} u + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \frac{\beta_2}{\alpha_2} w\right)^2 - \left(\frac{u^2}{\alpha_0} + \frac{v^2}{\alpha_1} + \frac{w^2}{\alpha_2}\right),$$

in welcher (ε) die Bedeutung hat:

$$(20) \ldots\ldots\ldots \varepsilon = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} - 1.$$

Auf Grund von (19) und der darauf folgenden Erklärung in der achtzehnten Vorlesung hat man demnach die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung:

$$(21)\ldots \quad \begin{aligned} \varepsilon\,\Phi(x, y, z) &= \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}y + \frac{\beta_2}{\alpha_2}z\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2}\right) \\ &= \varepsilon\left(\frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2}\right). \end{aligned}$$

Da man nun diese Gleichung mit der Gleichung (2) des Problems vertauschen kann ohne die Substitutionen (4) zu ändern, so sieht man, dass es erlaubt ist, in allen unseren Formeln folgende Veränderungen zu machen:

$$(22)\ldots \quad \begin{aligned} &\text{„}\ \ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2;\quad \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\quad \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2;\quad B_0,\ B_1,\ B_2 \\ &\text{„ in } \frac{\beta_0}{\alpha_0},\ \frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{\beta_2}{\alpha_2};\ \frac{\varepsilon}{\alpha_0},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_1},\ \frac{\varepsilon}{\alpha_2};\ \frac{\varepsilon}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_1},\ \frac{\varepsilon}{\lambda_2};\ \frac{\varepsilon B_0}{\lambda_0},\ \frac{\varepsilon B_1}{\lambda_1},\ \frac{\varepsilon B_2}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Denn da die Werthe der neun Substitutionscoefficienten (6) sich durch die ersten von diesen Aenderungen nicht ändern dürfen, so müssen die drei letzten Grössen B_0, B_1, B_2 eben die angegebenen Veränderungen erhalten.

Die Veränderungen (18) in (21) lassen, wenn man setzt:

$$(23)\ \ldots\ldots\ldots \quad E = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda} - 1,$$

folgende durch die Substitutionen (4) in λ identische Gleichung hervorgehen:

$$(24) \quad \begin{aligned} &\left(\frac{\beta_0 x}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{\beta_1 y}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{\beta_2 z}{\alpha_2 + \lambda}\right)^2 - E\left(\frac{x^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{y^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{z^2}{\alpha_2 + \lambda}\right) \\ &= E\left(\frac{X^2}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{Y^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{Z^2}{\lambda_2 - \lambda}\right). \end{aligned}$$

An das Vorhergehende reiht sich ein System eleganter Formeln an, welches, zu ferneren Transformationen dienlich, sich fast ohne alle Rechnung sofort hinschreiben lässt.

Setzt man die Werthe der Substitutionscoefficienten (6) in (16) der neunzehnten Vorlesung ein, so erhält man:

$$(25)\ldots\ldots\quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^2}&=\frac{1}{B_0^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^2}&=\frac{1}{B_1^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^2}&=\frac{1}{B_2^2}.
\end{aligned}$$

$$(26)\ldots\quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}&=0,\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_0)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_0)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_0)}&=0,\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)}&=0.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung (21) der 19. Vorlesung $a'b''-a''b'=c^0$, sowie auch jede andere des Systemes, geht in gleicher Weise mit Berücksichtigung von (10) über in:

$$(27)\; B_0B_1B_2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_1)+\beta_0\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_0-\alpha_1)=0.$$

Macht man in den drei ersten Gleichungen (7) die Aenderungen (22) und hierauf die Aenderungen (18), so erhält man:

$$(28)\ldots\quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda)}&=\frac{E}{\lambda_0-\lambda},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda)}&=\frac{E}{\lambda_1-\lambda},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda)}&=\frac{E}{\lambda_2-\lambda}.
\end{aligned}$$

Differenzirt man diese in λ identischen Gleichungen nach λ und setzt hierauf für λ entweder λ_0 oder λ_1 oder λ_2, so erhält man mit Rücksicht auf (25) und (7):

$$(29)\quad \begin{aligned}
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_0)^2}&=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)B_0^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_0)^2}&=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_0)B_0^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_0+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_1)^2}&=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)B_1^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)^2}&=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)B_1^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_2)^2}&=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_2)B_2^2},\\
\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)^2}&=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)B_2^2}.
\end{aligned}$$

Wenn man die Grössen B_0, B_1, B_2 als Functionen von α_0, α_1, α_2 und λ_0, λ_1, λ_2 betrachtet, wie sie durch (10) ausgedrückt sind, und die Logarithmen dieser Ausdrücke partiell differenzirt nach λ_0 oder λ_1 oder λ_2, so erhält man:

$$\frac{2}{B_0}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \lambda_0} = \frac{1}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_0},$$

$$\frac{2}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1},$$

$$\frac{2}{B_2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\alpha_0+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Da man aber ähnliche Ausdrücke erhält durch zweimalige Differentiation der also dargestellten identischen Gleichung (9):

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda} - 1 = \frac{(\lambda-\lambda_0)\,(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)}{(\alpha_0+\lambda)\,(\alpha_1+\lambda)\,(\alpha_2+\lambda)}$$

nach λ und Veränderung dieser variabeln Grösse in λ_0, λ_1, λ_2, nämlich:

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^2} =$$
$$= \frac{1}{B_0^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}\right\},$$

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^2} =$$
$$= \frac{1}{B_1^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}\right\},$$

$$\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^2} =$$
$$= \frac{1}{B_2^2}\left\{\frac{1}{\alpha_0+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_1+\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_0-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right\},$$

so ergiebt sich aus dem Vergleich dieser drei Gleichungen mit den drei vorhergehenden:

$$(30)\ \ldots\ \begin{cases} \dfrac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2} + \dfrac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2} + \dfrac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^2} = \dfrac{2}{B_0^3}\cdot\dfrac{\partial B_0}{\partial \lambda_0}, \\ \dfrac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_1)^2} + \dfrac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_1)^2} + \dfrac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_1)^2} = \dfrac{2}{B_1^3}\cdot\dfrac{\partial B_1}{\partial \lambda_1}, \\ \dfrac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_2)^2} + \dfrac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_2)^2} + \dfrac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_2)^2} = \dfrac{2}{B_2^3}\cdot\dfrac{\partial B_2}{\partial \lambda_2}. \end{cases}$$

Um endlich dieses, zum grössten Theile von Jacobi entwickelte, System von Formeln zu vervollständigen, fügen wir noch folgende hinzu:

$$(31)\quad \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)(\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_0+\lambda_2)}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_2)}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}=0,$$

welche sich aus den drei ersten Gleichungen (10) ohne Schwierigkeit ergiebt.

Allein durch Zusammenstellung der angegebenen Formeln geht folgendes System hervor, wenn man berücksichtiget, dass auf Grund von (10) ist:

$$2\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}=\frac{B_1}{\lambda_1-\lambda_0},\qquad 2\cdot\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}=\frac{B_2}{\lambda_2-\lambda_0},$$

nämlich:

$$(32)\quad\begin{cases}\dfrac{a^0x}{\alpha_0+\lambda_0}+\dfrac{b^0y}{\alpha_1+\lambda_0}+\dfrac{c^0z}{\alpha_2+\lambda_0}=\dfrac{2}{B_0}\cdot\dfrac{\partial B_0}{\partial\lambda_0}X+\dfrac{2}{B_0}\cdot\dfrac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}Y+\dfrac{2}{B_0}\cdot\dfrac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}Z,\\[2ex] \dfrac{a'x}{\alpha_0+\lambda_0}+\dfrac{b'y}{\alpha_1+\lambda_0}+\dfrac{c'z}{\alpha_2+\lambda_0}=\dfrac{2}{B_0}\cdot\dfrac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}X-\dfrac{2}{B_1}\cdot\dfrac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}Y,\\[2ex] \dfrac{a''x}{\alpha_0+\lambda_0}+\dfrac{b''y}{\alpha_1+\lambda_0}+\dfrac{c''z}{\alpha_2+\lambda_0}=\dfrac{2}{B_0}\cdot\dfrac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}X-\dfrac{2}{B_2}\cdot\dfrac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}Z.\end{cases}$$

Die erste von diesen Gleichungen wird erhalten, wenn man die erste Gleichung (30) mit B_0B_0X, die erste Gleichung (29) mit B_0B_1Y, die zweite Gleichung (29) mit B_0B_2Z multiplicirt und alle drei Gleichungen unter Berücksichtigung von (6) und (4) addirt. Ebenso wird die zweite Gleichung (32) erhalten, wenn man die erste Gleichung (29) mit B_0B_1X, die vierte Gleichung (29) mit B_1B_1Y, die Gleichung (31) mit B_2B_1Z multiplicirt und addirt. Die dritte Gleichung (32) erhält man endlich, wenn man die zweite Gleichung (29) mit B_0B_2X, die Gleichung (31) mit B_1B_2Y, die fünfte Gleichung (29) mit B_2B_2Z multiplicirt und addirt.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (32) der Reihe nach mit X, Y, Z, und addirt unter Berücksichtigung von (4), so erhält man:

$$(33)\quad\begin{aligned}&\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{z^2}{\alpha_2+\lambda_0}=\\ &=\frac{2}{B_0}\frac{\partial B_0}{\partial\lambda_0}X^2-\frac{2}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}Y^2-\frac{2}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}Z^2+\frac{4}{B_0}\frac{\partial B_1}{\partial\lambda_0}XY+\frac{4}{B_0}\frac{\partial B_2}{\partial\lambda_0}XZ,\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche durch die Substitutionen (4) zugleich mit (1) und (2) eine identische wird.

Wir erwähnen ferner des Systemes Gleichungen, welches aus (32) dadurch hervorgeht, dass man den Variabeln die Werthe zuertheilt: $x = \beta_0$, $y = \beta_1$, $z = \beta_2$ und demnach $X = B_0$, $Y = B_1$, $Z = B_2$, nämlich:

$$
(34) \ldots\ldots\ldots
\begin{aligned}
\frac{a^0\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{b^0\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{c^0\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} &= \frac{1}{B_0}, \\
\frac{a'\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{b'\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{c'\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} &= o, \\
\frac{a''\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{b''\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{c''\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} &= o.
\end{aligned}
$$

Um die erste von diesen Gleichungen in der angegebenen Form nachzuweisen, bedarf es freilich noch der Reduction $\frac{\partial (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2)}{\partial \lambda_0} = 1$, die sich aber umgehen lässt, wenn man an die Stelle der ersten Gleichung setzt die erste Gleichung (25), welche mit Berücksichtigung von (6) ohne Weiteres die gewünschte Gestalt annimmt.

Wir bringen endlich die Substitutionen (4) in Erinnerung:

$$
(35) \ldots\ldots\ldots\ldots
\begin{aligned}
a^0x + b^0y + c^0z &= X, \\
a'x + b'y + c'z &= Y, \\
a''x + b''y + c''z &= Z,
\end{aligned}
$$

um sie mit den beiden vorhergehenden Systemen Gleichungen zu einer neuen Gleichung zusammen zu stellen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke die linken Theile der Gleichungen (34) als die erste Horizontalreihe der Componenten einer Determinante K, die linken Theile der Gleichungen (35) als die zweite Horizontalreihe, und die linken Theile der Gleichungen (32) als die dritte Horizontalreihe der Componenten derselben Determinante, so haben wir nach Satz (31) der siebenten Vorlesung von der Multiplication der Determinanten:

$$
(36) \ldots\ldots K = \begin{vmatrix}
\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} \\
x, & y, & z, \\
\frac{x}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{y}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{z}{\alpha_2+\lambda_0}
\end{vmatrix} \ldots
$$

Denn der zweite Factor, die Determinante Δ, gebildet aus den neun Substitutionscoefficienten, ist nach (20) der neunzehnten Vorlesung $= 1$.

Wenn wir in gleicher Weise die Determinante K aus den rechten Theilen der angegebenen Gleichungen bilden, so erhalten wir mit Rücksicht auf (14) der siebenten Vorlesung:

$$(37)\ldots K = \frac{1}{B_0}\begin{vmatrix} Y, & Z, \\ \frac{2}{B_0}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0}X - \frac{2}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0}Y, & \frac{2}{B_0}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0}X - \frac{2}{B_1}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0}Z \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir diese Determinante entwickeln und für die partiellen Differentialquotienten die oben angegebenen Werthe einsetzen:

$$(38)\; K = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_1)B_0^2}\left\{(\lambda_1-\lambda_2)B_0YZ + (\lambda_2-\lambda_0)B_1ZX + (\lambda_0-\lambda_1)B_2XY\right\}.$$

Wir haben demnach die durch die Substitutionen (4) identische Gleichung:

$$(39)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0} \\ x, & y, & z \\ \frac{x}{\alpha_0+\lambda_0}, & \frac{y}{\alpha_1+\lambda_0}, & \frac{z}{\alpha_2+\lambda_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_1)B_0^2}\left\{(\lambda_1-\lambda_2)B_0YZ + (\lambda_2-\lambda_0)B_1ZX + (\lambda_0-\lambda_1)B_2XY\right\}.$$

Diese Gleichung ist im Grunde nichts Neues. Denn sie führt vollständig entwickelt auf die Gleichung (31) der neunzehnten Vorlesung zurück. Sie ist aber von Bedeutung wegen der Form, in der sie hier auftritt.

Wir gehen über zur geometrischen Interpretation einzelner Gleichungen, welche wir in dem Vorhergehenden entwickelt haben.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Grössen β_0, β_1, β_2 als die variabeln rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume. Unter dieser Voraussetzung stellt die erste Gleichung (8) eine auf ihre Hauptaxen bezogene Oberfläche zweiter Ordnung dar. Lässt man in ihr λ variiren, so erhält man ein ganzes System Oberflächen zweiter Ordnung von der Eigenschaft, dass ihre durch irgend zwei Hauptaxen gelegten Schnitte, welche, wie bekannt, Kegelschnitte sind, dieselben Brennpunkte haben. Solche Oberflächen nennt man confocale Oberflächen zweiter Ordnung. Ihr analytischer Ausdruck ist die Gleichung (8) mit veränderlichem Werthe von λ.

Betrachten wir den Punkt im Raume als einen gegebenen durch seine Coordinaten β_0, β_1, β_2, so beweist das erste System Gleichungen (7), dass durch den gegebenen Punkt drei verschiedene confocale Oberflächen hindurchgehen. Die eine von diesen Oberflächen ist ein Ellipsoid, weil alle drei Nenner in der ersten Gleichung positiv sind. Die zweite Oberfläche ist ein erstes Hyperboloid, weil in der zweiten Gleichung der dritte Nenner allein negativ ist. Die dritte Oberfläche ist ein Hyperboloid der zweiten Art, weil die beiden letzten Nenner in der dritten Gleichung negativ sind, während der erste positiv ist.

Jede von den drei Arten confocaler Oberflächen erfüllt den ganzen unendlichen Raum, weil für beliebige Werthe der Coordinaten β_0, β_1, β_2 immer Wurzeln der kubischen Gleichung (8) gefunden werden, welche zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen.

Lässt man λ abnehmen von ∞ bis $-\alpha_2$, so wird das für $\lambda = \infty$ unendlich grosse Ellipsoid immer kleiner bis es endlich in die Fläche der Ellipse fällt, welche durch die Gleichung ausgedrückt ist:

$$(40) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1.$$

Diese Fläche bildet die Grenze zwischen den Ellipsoiden und den Hyperboloiden der ersten Art. Das Hyperboloid der ersten Art in dieser Grenze fällt zusammen mit dem Theile der $\beta_0\beta_1$Ebene, welcher von der genannten Ellipse ausgeschlossen ist. Nimmt λ weiter ab von $-\alpha_2$ bis $-\alpha_1$, so bildet in der letzten Grenze die Fläche der in der $\beta_0\beta_2$Ebene liegenden Hyperbel:

$$(41) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 - \alpha_1} - \frac{\beta_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1$$

die Grenzen der Hyperboloide der ersten Art und der Hyperboloide der zweiten Art. Die andere Grenze der Hyperboloide der zweiten Art bildet die $\beta_1\beta_2$Ebene.

Zwei confocale Oberflächen derselben Art können sich nicht in reellen Punkten schneiden, weil für einen reellen Schnittpunkt β_0 β_1 β_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung (8) dann nicht zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen würden.

Die Cosinus der Winkel, welche die in dem Punkte $\beta_0\,\beta_1\,\beta_2$ an die drei durch ihn gehenden confocalen Oberflächen (7) gelegten Tangentenebenen mit den Coordinatenebenen bilden, verhalten sich bekanntlich wie:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_0} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_0} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_0},$$
$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_1} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_1},$$
$$\frac{\beta_0}{\alpha_0+\lambda_2} : \frac{\beta_1}{\alpha_1+\lambda_2} : \frac{\beta_2}{\alpha_2+\lambda_2}.$$

Die aus diesen 9 Ausdrücken zusammengesetzten Gleichungen (26) beweisen, dass die genannten Tangentenebenen auf einander senkrecht stehen. Diese Bemerkungen fassen wir in einem Satze zusammen wie folgt:

Confocale Oberflächen derselben Art schneiden sich nicht. Confocale Oberflächen verschiedener Art schneiden sich immer in reellen Punkten senkrecht. In jedem Punkte des Raumes schneiden sich drei mit einer gegebenen Oberfäche zweiter Ordnung confocale Oberflächen.

Wenn man, um die geometrische Bedeutung der Gleichung (24) festzustellen, von einem durch seine Coordinaten $\beta_0\,\beta_1\,\beta_2$ gegebenen Punkte im Raume an die Oberfläche (8) einen Tangentenkegel legt, so wird die Gleichung desselben nach Vorschrift von (20) der vierzehnten Vorlesung:

$$(42)\quad \left\{\frac{\beta_0 x}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1 y}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2 z}{\alpha_2+\lambda}-1\right\}^2 - E\left\{\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{z^2}{\alpha_2+\lambda}-1\right\} = o.$$

Die Summe der Glieder zweiter Ordnung in dieser Gleichung ist gerade der Ausdruck, der in (24) durch die Substitutionen (4) transformirt worden ist. Durch diese Transformation ist zugleich das Problem der Hauptaxen des Tangentenkegels gelöset. Die Auflösung des Problemes ist in Betreff der neun Substitutionscoefficienten unabhängig von dem besonderen Werthe von λ in (42) und kann nach dem Vorhergehenden deshalb in Worten also wiedergegeben werden:

Die Tangentenkegel, welche von einem beliebig gegebenen Punkte als Spitze an confocale Oberflä-

flächen zweiter Ordnung gelegt werden, haben dieselben Richtungen ihrer Hauptaxen. Die durch den gegebenen Punkt gelegten Tangentenebenen an die drei, durch ihn gehenden, confocalen Oberflächen schneiden sich in den allen jenen Tangentenkegeln gemeinschaftlichen Hauptaxen.

Ein Punkt im Raume bestimmt die drei durch ihn gelegten, mit einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung confocalen, Oberflächen. Umgekehrt ist der Punkt bestimmt durch die drei confocalen Oberflächen, welche durch ihn gehen. Diese drei Oberflächen bestimmen zwar, indem sie sich schneiden, 8 verschiedene Punkte. Allein unter angemessener Beschränkung, zum Beispiel, dass der Punkt nur positive rechtwinklige Coordinaten habe, wird derselbe durch die drei durch ihn gehenden confocalen Oberflächen unzweideutig bestimmt sein. Wir werden in dem Folgenden diese Beschränkung festhalten. In dieser Voraussetzung bestimmen die rechtwinkligen Coordinaten β_0, β_1, β_2 eines beliebig gewählten Punktes p im Raume auch die drei Werthe von λ gleich λ_0, λ_1, λ_2, welche den drei, durch den Punkt gelegten, confocalen Oberflächen (7) entsprechen; und umgekehrt sind durch letztere die rechtwinkligen Cordinaten β_0, β_1, β_2 des Punktes p unzweideutig bestimmt.

Diese drei Wurzeln λ_0, λ_1, λ_2 der kubischen Gleichung (8) führen den Namen der elliptischen Coordinaten des Punktes im Raume, dessen rechtwinklige Coordinaten sind β_0, β_1, β_2. Ihr geometrisches Bild sind die drei, durch ihn gehenden, confocalen Oberflächen. Durch letztere wird in ihrer unendlich nahen Aufeinanderfolge der unendliche Raum zertheilt in rechtwinklige Parallelepipeden, wie dasselbe in ähnlicher Weise in dem rechtwinkligen Coordinatensystem durch die Coordinatenebenen in ihrer Aufeinanderfolge geschieht. Die Summe aller dieser Parallelopipeden, welche innerhalb einer gegebenen Oberfläche liegen, bestimmen den körperlichen Inhalt der Oberfläche.

Die Curven, in welchen sich zwei confocale Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, nennt man Krümmungscurven. Durch jeden Punkt des Raumes gehen also drei in dem Punkte auf einander senkrecht stehende Krümmungscurven. Die eine schneidet sämmtliche confocale Ellipsoide, die zweite sämmtliche

confocale Hyperboloide der ersten und die dritte sämmtliche confocale Hyperboloide der zweiten Art senkrecht. Krümmungscurven, welche auf ein und derselben confocalen Oberfläche zweiter Ordnung liegen, heissen **Krümmungscurven dieser Oberfläche.**

Die Krümmungscurven einer Oberfläche zweiter Ordnung kann man nach dem Vorhergehenden eintheilen in zwei Arten: Die Krümmungscurven der einen sowie die Krümmungscurven der anderen Art schneiden sich nicht. Dagegen schneiden die Krümmungscurven der einen Art die Krümmungscurven der anderen Art senkrecht.

Die Krümmungscurven einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung zertheilen demnach in ihrer unendlich nahen Aufeinanderfolge die Fläche in unendlich kleine Rechtecke. Die Summe dieser Rechtecke giebt den Flächeninhalt der Oberfläche.

Der analytische Ausdruck der Krümmungscurven in elliptischen Coordinaten sind zwei von den Gleichungen:

$$\lambda_0 = C_0, \quad \lambda_1 = C_1, \quad \lambda_2 = C_2,$$

in welchen die Werthe der Constanten C_0, C_1, C_2 beliebig zu wählen sind aus den in (12) angegebenen Grenzen. In rechtwinkligen Coordinaten sind es zwei von den in (7) angegebenen Gleichungen.

Zur Transformation eines in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Ausdruckes in elliptische Coordinaten dienen die drei ersten Gleichungen (10). Zu den Differentialen der rechtwinkligen Coordinaten, ausgedrückt durch die elliptischen Coordinaten, gelangt man auf folgendem Wege.

Differenzirt man die Gleichungen (7), indem man ebenso die rechtwinkligen als die elliptischen Coordinaten als variabel betrachtet, die Grössen α_0, α_1, α_2 aber als constant, so erhält man mit Berücksichtigung von (6):

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{2B_0} &= a^0 d\beta_0 + b^0 d\beta_1 + c^0 d\beta_2, \\ \frac{d\lambda_1}{2B_1} &= a' d\beta_0 + b' d\beta_1 + c' d\beta_2, \\ \frac{d\lambda_2}{2B_2} &= a'' d\beta_0 + b'' d\beta_1 + c'' d\beta_2. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieses Systemes Gleichungen mit den Substitutionen (4) erweiset folgenden Satz:

Es ist erlaubt, sowohl in den Substitutionen (4), als in allen den Gleichungen, welche diese Substitutionen zu identischen Gleichungen machen, folgende gleichzeitige Veränderungen zu machen:

$$(44) \ldots\ldots \quad \begin{array}{lllllll} \text{„} & x, & y, & z; & X, & Y, & Z, \\ \text{„} & d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2; & \dfrac{d\lambda_0}{2B_0}, & \dfrac{d\lambda_1}{2B_1}, & \dfrac{d\lambda_2}{2B_2}. \end{array}$$

Von den durch diese Veränderungen aus den entwickelten Formeln hervorgehenden Differentialformeln heben wir nur drei hervor. Erstens die aus (39) hervorgehende Differentialformel:

$$(45) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \dfrac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \dfrac{\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \\ d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2 \\ \dfrac{d\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \dfrac{d\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \dfrac{d\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \end{vmatrix} =$$

$$= Q\left\{(\lambda_1 - \lambda_2)B_0^2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_0)B_1^2\, d\lambda_2\, d\lambda_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)B_2^2\, d\lambda_0\, d\lambda_1\right\}$$

$$\text{wo } Q = \frac{1}{4B_0^2 B_1 B_2 (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_1)}.$$

Auf die Bedeutung dieses Differentialausdruckes werden wir in einer späteren Vorlesung, die über die Krümmungscurven der Oberflächen im Allgemeinen handeln wird, wieder zurückkommen.

Wir führen zweitens die aus (33) hervorgehende Differential-Formel an:

$$(46) \ldots\ldots \quad \frac{d\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0} =$$

$$= \frac{1}{2B_0^3}\frac{\partial B}{\partial \lambda_0}\, d\lambda_0^2 - \frac{1}{2B_1^3}\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0}\, d\lambda_1^2 - \frac{1}{2B_2^3}\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0}\, d\lambda_2^2$$

$$+ \frac{1}{B_0^2 B_1}\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0}\, d\lambda_0\, d\lambda_1 + \frac{1}{B_0^2 B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0}\, d\lambda_0\, d\lambda_2,$$

von welcher wir in der folgenden Vorlesung Gebrauch machen werden.

Drittens machen wir auf die aus Gleichung (1) hervorgehende Differential-Formel aufmerksam:

$$(47) \ldots d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{B_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{B_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{B_2^2}\right\},$$

welche das Quadrat des Differentiales ds des Bogens irgend einer Curve darstellt, auf der einen Seite ausgedrückt durch rechtwinklige, auf der anderen Seite durch elliptische Coordinaten.

Setzen wir, um diesen Differential-Ausdruck übersichtlicher zu machen:

$$(48) \ldots\ldots \begin{aligned} A_0^2 &= (\alpha_0 + \lambda_0)(\alpha_1 + \lambda_0)(\alpha_2 + \lambda_0), \\ -A_1^2 &= (\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda_1)(\alpha_2 + \lambda_1), \\ A_2^2 &= (\alpha_0 + \lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_2)(\alpha_2 + \lambda_2), \\ P &= (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2), \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$(49) \ldots ds^2 = \frac{P}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)A_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{(\lambda_0 - \lambda_2)A_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{(\lambda_0 - \lambda_1)A_2^2}\right\}.$$

Hieraus ergeben sich die Differentiale da_0, da_1, da_2 der Längen der Krümmungscurven, welche auf den confocalen Ellipsoiden, den confocalen Hyperboloiden der ersten, den confocalen Hyperboloiden der zweiten Art senkrecht stehen:

$$(50) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{aligned} da_0 &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)}\,A_0}, \\ da_1 &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\,A_1}, \\ da_2 &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{P}\,d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\,A_2}, \end{aligned}$$

und aus dem letzteren der ganze Umfang U der Krümmungscurve, in welcher sich das Ellipsoid $\lambda_0 = C_0$ und das Hyperboloid $\lambda_1 = C_1$ schneiden, durch Integration und Multiplication mit 4:

$$(51) \ldots\ldots\ldots U = 2\int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1} \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)}\,d\lambda_2}{A_2},$$

wobei zu bemerken ist, dass nur der eine Zweig der Krümmungscurve in Betracht gezogen worden ist.

Wenn λ_1 den Werth $-\alpha_2$ erhält, so fällt das diesem Werthe entsprechende Hyperboloid in die $\beta_0\,\beta_1$ Ebene des Coordinatensystems, und die in Rede stehende Krümmungscurve geht über in den Kegelschnitt, in welchem das Ellipsoid von der $\beta_0\beta_1$ Ebene geschnitten wird. Deshalb geht auch der angegebene Ausdruck U in diesem Falle über in den Ausdruck (35) der vorhergehenden Vorlesung, wenn man überdies $\lambda_0 = \lambda$ setzt.

Wenn man die Bogenelemente da_1 und da_2 multiplicirt, so erhält man das Flächenelement dF des Ellipsoides $\lambda_0 = C_0$:

$$(52) \;\ldots\; dF = \frac{1}{4}\cdot\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{A_1\,A_2},$$

woraus durch doppelte Integration und Multiplication mit 8 der ganze **Flächeninhalt** F **des Ellipsoides** $\lambda_0 = C_0$ hervorgeht:

$$(53) \;\ldots\; F = 2\int\limits_{-\alpha_0}^{-\alpha_1}\int\limits_{-\alpha_1}^{-\alpha_2}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{A_1\,A_2}.$$

Um diese Formel zu prüfen, setzen wir $\lambda_0 = -\alpha_2$, in welchem Falle F den doppelten Flächeninhalt der Ellipse (40) geben muss, deren einfacher J aus (38) der vorhergehenden Vorlesung erhalten wird, wenn man $\lambda = -\alpha_2$ setzt. Man sieht aber in der That, dass, für $\lambda = \lambda_0 = -\alpha_2$, wenn man die gleichen Factoren des Zählers und Nenners in F unterdrückt, wird:

$$2J = F.$$

Man erhält endlich das Körperelement dE, wenn man die Bogenelemente da_0, da_1, da_2 multiplicirt:

$$(54) \;\ldots\; dE = \frac{1}{8}\cdot\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_0\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{A_0\,A_1\,A_2},$$

woraus durch dreifache Integration und Multiplication mit 8 **der kubische Inhalt** E **des Ellipsoides** $\lambda_0 = C_0$ hervorgeht:

$$(55) \;\ldots\; E = \int\limits_{-\alpha_0}^{-\alpha_1}\int\limits_{-\alpha_1}^{-\alpha_2}\int\limits_{-\alpha_2}^{\lambda_0}\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_0\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{A_0\,A_1\,A_2}.$$

Direct findet man den kubischen Inhalt E des Ellipsoides in folgender Weise. Man beschreibe um den Mittelpunkt des Ellipsoides mit der grössten Axe als Radius eine Kugel:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_0+\lambda_0}=1.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der ersten Gleichung (7) des Ellipsoides lehrt, dass jede auf der grössten Axe des Ellipsoides senkrecht stehende Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse und die Kugel in einem Kreise schneidet, deren Flächeninhalte sich verhalten wie:

$$\sqrt{(\alpha_1+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_2+\lambda_0)}\ :\ \sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}.$$

In demselben Verhältnisse stehen auch die körperlichen Inhalte des Ellipsoides E und der Kugel K. Man hat daher:

$$E=K\cdot\frac{\sqrt{(\alpha_1+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_2+\lambda_0)}}{\sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}}$$

Setzt man nun für K den bekannten Werth für den Inhalt der Kugel, so hat man:

$$(56)\ \ldots\quad E=\tfrac{4}{3}\cdot\sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_1+\lambda_0)}\,\sqrt{(\alpha_2+\lambda_0)}\cdot\pi.$$

Man hat daher mit Rücksicht auf (55) die merkwürdige Integral-Formel:

$$(57)\quad \tfrac{4}{3}\sqrt{(\alpha_0+\lambda_0)}\sqrt{(\alpha_1+\lambda_0)}\sqrt{(\alpha_2+\lambda_0)}\cdot\pi=\int_{-\alpha_0}^{-\alpha_1}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_2}\int_{-\alpha_2}^{\lambda_0}\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}{\Delta_0\Delta_1\Delta_2}\,d\lambda_0\,d\lambda_1\,d\lambda_2.$$

Ein specieller Fall der elliptischen Raumcoordinaten, mit deren Hülfe wir die vorangegangenen Integralformeln fanden, sind die elliptischen Kugelcoordinaten. Man wird auf sie geführt durch die Annahme, dass die Grössen α_0, α_1, α_2 sich sämmtlich der Grenze Null nähern.

Diese Bedingung drücken wir dadurch aus, dass wir setzen:

$$(58)\ \ldots\ldots\ldots\quad \alpha_0=\varepsilon\alpha^0,\quad \alpha_1=\varepsilon\alpha',\quad \alpha_2=\varepsilon\alpha''$$

und annehmen, dass der Factor ε sich der Grenze Null nähere, während die Grössen α^0, α', α'' irgend welche gegebene endliche

Werthe behalten. Da nun die elliptischen Coordinaten λ_0, λ_1, λ_2 zwischen den in (12) angegebenen Grenzen liegen, so werden wir setzen:

$$(59) \quad \lambda_0 = \lambda^0, \quad \lambda_1 = \varepsilon \lambda', \quad \lambda_2 = \varepsilon \lambda'',$$

um mit endlichen Werthen von λ^0, λ', λ'' zu operiren.

Die Grössen λ^0, λ', λ'' sind nun diejenigen, welche wir **elliptische Kugelcoordinaten** nennen.

Die Relationen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten und den elliptischen Kugelcoordinaten erhalten wir durch Einsetzen der Werthe (58) und (59) in die drei ersten Gleichungen (7), nämlich:

$$(60) \quad \begin{aligned} \beta_0^2 \;\; + \;\; \beta_1^2 \;\; + \;\; \beta_2^2 \;\; &= \lambda^0, \\ \frac{\beta_0^2}{\alpha^0 + \lambda'} + \frac{\beta_1^2}{\alpha' + \lambda'} + \frac{\beta_2^2}{\alpha'' + \lambda'} &= o, \\ \frac{\beta_0^2}{\alpha^0 + \lambda''} + \frac{\beta_1^2}{\alpha' + \lambda''} + \frac{\beta_2^2}{\alpha'' + \lambda''} &= o. \end{aligned}$$

Was die Grenzen der elliptischen Kugelcoordinaten anbetrifft, so entnehmen wir aus (12), dass von diesen Coordinaten:

$$(61) \quad \begin{aligned} &\text{die grösste } \lambda^0 \text{ liegt zwischen } \infty \text{ und } o, \\ &\text{die mittlere } \lambda' \text{ zwischen } -\alpha'' \text{ und } -\alpha', \\ &\text{die kleinste } \lambda'' \text{ zwischen } -\alpha' \text{ und } -\alpha^0, \\ &\text{vorausgesetzt, dass: } \alpha^0 > \alpha' > \alpha''. \end{aligned}$$

Hiernach stellt die erste Gleichung (60) ein System concentrischer Kugeln dar, die zweite und dritte Gleichung ein System confocaler Kegel, deren Spitzen in dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kugeln liegen. Im Uebrigen wiederholt sich an diesen drei Arten Oberflächen das, was wir von den drei Arten confocaler Oberflächen ausgesagt haben.

Die Curven, in welchen die genannten Kegel die Kugel, deren Radius $\sqrt{\lambda^0} = 1$ ist, schneiden, nennen wir **sphärische Kegelschnitte**. Es sind dieses die Schnittcurven von beliebigen Kegeln zweiter Ordnung mit einer Kugel, deren Radius $= 1$ und deren Mittelpunkt in der Spitze der Kegel liegt.

Das Bogenelement da_2, des durch $\lambda^0 = 1$ und $\lambda' = C'$ bestimmten sphärischen Kegelschnittes wird demnach, wenn wir, um abzukürzen, setzen:

$$(62) \quad \begin{aligned} -\Lambda'^2 &= (\alpha^0 + \lambda')(\alpha' + \lambda')(\alpha'' + \lambda'), \\ \Lambda''^2 &= (\alpha^0 + \lambda'')(\alpha' + \lambda'')(\alpha'' + \lambda''); \end{aligned}$$

aus (50) erhalten gleich:

$$(63) \quad da_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda' - \lambda'')}}{\Lambda''} d\lambda'',$$

woraus man durch Integration und Multiplication mit 4 den ganzen **Umfang** U' **der sphärischen Ellipse** erhält, welche durch die Gleichungen $\lambda^0 = 1$. und $\lambda' = C'$ gegeben ist:

$$(64) \quad U' = 2 \cdot \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \frac{\sqrt{(\lambda' - \lambda'')}}{\Lambda''} d\lambda''.$$

Diese Gleichung geht, wenn man $\lambda' = -\alpha''$ setzt, über in.

$$(65) \quad 2\pi = 2 \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \frac{d\lambda''}{\sqrt{-(\alpha^0 + \lambda'')(\alpha' + \lambda'')}},$$

weil in diesem Falle die sphärische Ellipse ein grösster Kugelkreis wird. Die Richtigkeit dieser Integral-Formel lässt sich leicht direct nachweisen.

Das Flächenelement dF auf der Kugeloberfläche erhält man aus (52) gleich:

$$(66) \quad dF = \tfrac{1}{4} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''} d\lambda' \, d\lambda'',$$

und daraus den **Flächeninhalt** F' **der sphärischen Ellipse**, welche durch $\lambda^0 = 1$ und $\lambda' = C'$ gegeben ist, durch Integration und Multiplication mit 4, nämlich:

$$(67) \quad F' = \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \int_{-\alpha'}^{\lambda'} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''} d\lambda' \, d\lambda''.$$

Dieser Flächeninhalt wird gleich der halben Kugeloberfläche, wenn $\lambda' = -\alpha''$. Man hat daher die merkwürdige Integral-Formel:

$$(68) \quad 2\pi = \int_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \int_{-\alpha'}^{-\alpha''} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{\Lambda' \Lambda''} d\lambda' \, d\lambda''.$$

Das Körperelement dK erhält man aus (54):

$$(69) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dK = \frac{\sqrt{\lambda^0}\,(\lambda' - \lambda'')}{A' A''}\, d\lambda^0\, d\lambda'\, d\lambda'',$$

und durch Integration und Multiplication mit 8 den körperlichen Inhalt K der Kugel mit dem Radius $\sqrt{\lambda^0}$:

$$(70) \quad \ldots\ldots \quad K = \tfrac{8}{3}\,\lambda^{0\frac{3}{2}} \int\limits_{-\alpha^0}^{-\alpha'} \int\limits_{-\alpha'}^{-\alpha''} \frac{(\lambda' - \lambda'')}{A' A''}\, d\lambda'\, d\lambda'',$$

woraus ebenfalls die Integral-Formel (68) hervorgeht, wenn man für den körperlichen Inhalt der Kugel seinen bekannten Werth setzt.

Schliesslich wollen wir noch eines Princips Erwähnung thun, welches dazu dient, gewisse Doppelintegrale auf einfache Integrale zurückzuführen. Dieses Princip leiten wir aus dem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie her, dass jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks zu der ihm entsprechenden Seite des Polardreiecks addirt π giebt. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu dem Umfange seines Polardreiecks addirt 2π giebt.

In dieser Fassung lässt sich der angegebene Satz leicht auf sphärische Polygone ausdehnen, so wie auf irgend welche geschlossene Curven auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius $= 1$ ist. Wenn man nämlich unter Polarcurve einer gegebenen Curve auf der Kugeloberfläche diejenige versteht, welche von dem grössten Kreise berührt wird, dessen Pol die gegebene Curve beschreibt, so hat man als Erweiterung des angegebenen Satzes folgenden:

Die Summe des Flächeninhaltes einer sphärischen geschlossenen Curve und des Umfanges ihrer Polarcurve ist gleich 2π.

Da sich nun der Flächeninhalt einer sphärischen Curve als ein Doppelintegral darstellt, der Umfang der Polarcurve aber als ein einfaches Integral, so sieht man, wie auf diesen Satz gestützt gewisse Doppelintegrale auf einfache Integrale zurückgeführt werden können.

Als ein einfaches Beispiel solcher Zurückführungen bietet sich die sphärische Ellipse dar, welche von dem Kegel begrenzt wird:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha^0+\lambda'} + \frac{\beta_1^2}{\alpha'+\lambda'} + \frac{\beta_2^2}{\alpha''+\lambda'} = o,$$

deren Polarellipse nach (15) der vierzehnten Vorlesung von dem Kegel:

$$(\alpha^0+\lambda')\beta_0^2 + (\alpha'+\lambda')\beta_1^2 + (\alpha''+\lambda')\beta_2^2 = o$$

begrenzt wird.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Kürzeste Linien auf dem Ellipsoid.

Die Variations-Rechnung lehrt die Differentialgleichungen der kürzesten Linien auf Oberflächen entwickeln, und ermittelt aus denselben durch geometrische Interpretation Eigenschaften dieser Linien. Unter diesen findet sich die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linien auf einer Oberfläche, dass die Schmiegungsebene der kürzesten Linie in jedem ihrer Punkte durch die in diesem Punkte errichtete Normale der Oberfläche hindurchgeht. Denn, wenn eine Curve auf der Oberfläche diese Eigenschaft hat, so ist sie eine kürzeste Linie auf derselben. Wir nehmen diese charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie als Definition derselben an, um daraus ihre Differentialgleichung herzuleiten.

Es seien β_0, β_1, β_2 die Coordinaten eines beliebigen Punktes p einer durch ihre Gleichung gegebenen Oberfläche:

(1) . . . . $u = o.$

Es seien ferner $\beta_0 + d\beta_0$, $\beta_1 + d\beta_1$, $\beta_2 + d\beta_2$ die Coordinaten eines beliebigen, aber dem Punkte p unendlich nahen Punktes q der Oberfläche. Da diese Coordinaten auch der Gleichung (1) genügen müssen, so hat man:

$$u + u_0 d\beta_0 + u_1 d\beta_1 + u_2 d\beta_2 = o,$$

wenn man um abzukürzen setzt:

$$(2) \ldots\ldots \frac{du}{d\beta_0} = u_0, \quad \frac{du}{d\beta_1} = u_1, \quad \frac{du}{d\beta_2} = u_2.$$

Wenn man die Gleichung (1) von der darauf folgenden abzieht, und die höheren Potenzen der unendlich kleinen Grössen $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ gegen die niederen vernachlässiget, so erhält man die Gleichung einer durch den Punkt p gehenden Ebene:

$$(3) \ldots\ldots u_0 d\beta_0 + u_1 d\beta_1 + u_2 d\beta_2 = o$$

bezogen auf ein, dem zum Grunde gelegten Coordinatensystem, paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem Punkte p liegt, indem die unendlich kleinen Grössen $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ die Coordinaten des Punktes q in diesem Systeme vorstellen.

Es beweiset dieses, dass der, dem Punkte p unendlich nahe Punkt q bei seiner Bewegung auf der Oberfläche einen Theil der Ebene (3) beschreibt, — der Tangentenebene der Oberfläche in dem Punkte p. Die Normale der Oberfläche, das ist die Normale der Tangentenebene in dem Berührungspunkte, bildet demnach mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$u_0 : u_1 : u_2.$$

Schmiegungsebene einer Curve im Raume in einem gegebenen Punkte p der Curve wird diejenige Ebene genannt, welche durch den gegebenen Punkt und durch zwei andere Punkte der Curve geht, die dem gegebenen unendlich nahe liegen.

Um die Gleichung der Schmiegungsebene in symmetrischer Form zu erhalten, werden wir annehmen, dass die Coordinaten:

$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \beta_2$$

eines beliebigen Punktes p auf der gegebenen Curve als Functionen der einen unabhängigen Variabeln t gegeben seien. Aus denselben erhält man die Coordinaten des, dem Punkte p unendlich nahen, Punktes q der Curve, indem man für t setzt $t + dt$:

$$\beta_0 + \beta_0' dt, \quad \beta_1 + \beta_1' dt, \quad \beta_2 + \beta_2' dt,$$

wo β_0', β_1', β_2' die Differentialquotienten der Coordinaten nach der unabhängigen Variabeln t bedeuten. Setzt man in diesen Ausdrücken für t wieder $t + dt$, so erhält man die Coordinaten eines dritten, unendlich nahen Punktes r der Curve:

$$\beta_0 + 2\beta_0' dt + \beta_0'' dt^2, \quad \beta_1 + 2\beta_1' dt + \beta_1'' dt^2, \quad \beta_2 + 2\beta_2' dt + \beta_2'' dt^2.$$

Diese Coordinaten beziehen sich auf das ursprüngliche Coordinatensystem. Verlegt man jedoch den Anfangspunkt in den Punkt p, so werden die Coordinaten des ersten Punktes sämmtlich o und die Coordinaten der beiden anderen Punkte q und r werden:

$$\beta_0' dt, \qquad \beta_1' dt, \qquad \beta_2' dt,$$

$$2\beta_0' dt + \beta_0'' dt^2, \quad 2\beta_1' dt + \beta_1'' dt^2, \quad 2\beta_2' dt + \beta_2'' dt^2.$$

Sind nun:

$$X, \quad Y, \quad Z$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes s rücksichtlich des letzten Coordinatensystemes, so erhält man die Bedingung, dass die vier Punkte p, q, r, s in ein und derselben Ebene liegen, wenn man die aus den angegebenen 9 Coordinaten gebildete Determinante gleich o setzt. Es ist dieses die Gleichung der Schmiegungsebene, welcher man nach Satz (29) und (30) der siebenten Vorlesung und mit Weglassung des Factors dt^3 folgende Gestalt geben kann:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \beta_0', & \beta_1', & \beta_2' \\ \beta_0'', & \beta_1'', & \beta_2'' \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix} = o.$$

Nimmt man nun an, dass die Curve auf der Oberfläche (1) $u = o$ liege, so erhält man aus der letzten Gleichung die Bedingungsgleichung, welche für jeden Punkt p der Curve erfüllt werden muss, wenn die Normale der Oberfläche in der Schmiegungsebene der Curve liegen soll:

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \beta_0', & \beta_1', & \beta_2' \\ \beta_0'', & \beta_1'', & \beta_2'' \\ u_0, & u_1, & u_2 \end{vmatrix} = o.$$

Es ist dieses die Differentialgleichung der oben definirten kürzesten Linie der Oberfläche, welche in der Zusammenstellung

mit der Gleichung $u = o$ der Oberfläche die kürzeste Linie derselben analytisch ausdrückt. Vollständig entwickelt hat sie die Form:

$$(6) \ldots (u_1\beta_2'' - u_2\beta_1'')\beta_0' + (u_2\beta_0'' - u_0\beta_2'')\beta_1' + (u_0\beta_1'' - u_1\beta_0'')\beta_2'' = o.$$

Da die kürzeste Linie ganz auf der Oberfläche $u = o$ liegt, so muss diese letzte Gleichung, wenn man die Werthe der Coordinaten $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, ausgedrückt als Functionen der unabhängigen Variabeln t, einsetzt, unabhängig von den besonderen Werthen von t erfüllt werden. Die Gleichung $u = o$ muss dadurch eine identische Gleichung in t werden. Durch einmalige und zweimalige Differentiation erhält man daher wieder identische Gleichungen:

$$(7) \ldots u_0\beta_0' + u_1\beta_1' + u_2\beta_2' = o,$$

$$(8) \ldots u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2' + u_0\beta_0'' + u_1\beta_1'' + u_2\beta_2'' = o,$$

welche man dazu benutzen kann, die Differentialgleichung (6) der kürzesten Linie der Oberfläche umzuformen, und zur Integration geschickt zu machen.

Bestimmen wir zu diesem Zwecke die Verhältnisse von $\beta_0', \beta_1', \beta_2'$ oder vielmehr diese, mit einem unbestimmten Factor μ multiplicirten, Grössen selbst aus den Gleichungen (6) und (7), so erhalten wir für die erste dieser Grössen:

$$\mu\,\beta_0' = u_2(u_2\beta_0'' - u_0\beta_2'') - u_1(u_0\beta_1'' - u_1\beta_0'')$$
$$= \beta_0(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) - u_0(u_0\beta_0'' + u_1\beta_1'' + u_2\beta_2''),$$

und mit Rücksicht auf (8):

$$\mu\beta_0' = \beta_0''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_0(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2').$$

Wir haben daher:

$$\mu\beta_0' = \beta_0''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_0(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$
$$\mu\beta_1' = \beta_1''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_1(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$
$$\mu\beta_2' = \beta_2''(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2) + u_2(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2').$$

Der Factor μ in diesen Gleichungen lässt sich auf doppelte Weise symmetrisch ausdrücken. Denn multiplicirt man diese Glei-

chungen respective mit β_0', β_1', β_2' und addirt, so erhält man den gesuchten Factor in der einen Ausdrucksweise:

$$\mu = \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(\beta_0'\beta_0'' + \beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2'')}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2}.$$

Multiplicirt man dagegen dieselben Gleichungen respective mit u_0', u_1', u_2' und addirt, so erhält man:

$$\mu = \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2'')}{u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'} + (u_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2').$$

Zieht man den ersten angegebenen Werth von μ von dem letzten ab, und dividirt durch $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2$, so erhält man folgende Form der Differentialgleichung der kürzesten Linie auf der gegebenen Oberfläche $u = o$:

$$(9)\quad \frac{u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2''}{u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'} + \frac{u_0u_0' + u_1u_1' + u_2u_2'}{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2} - \frac{\beta_0'\beta_0'' + \beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2''}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2} = o.$$

Von den drei Brüchen, aus welchen diese Gleichung zusammengesetzt ist, sind die beiden letzten die vollständigen Differentialquotienten der Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}\log(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2),$$
$$\tfrac{1}{2}\log(\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2).$$

Aber auch der erste Bruch wird ein vollständiger Differentialquotient des Ausdruckes:

$$\tfrac{1}{2}\log(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2'),$$

wenn man voraussetzt, dass:

$$(10)\ \ldots\ u_0'\beta_0'' + u_1'\beta_1'' + u_2'\beta_2'' = u_0''\beta_0' + u_1''\beta_1' + u_2''\beta_2'.$$

Unter dieser Voraussetzung hat man das erste Integral der Differentialgleichung (9) mit der willkürlichen Constante c:

$$(11)\ \ldots\ \frac{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(u_0'\beta_0' + u_1'\beta_1' + u_2'\beta_2')}{\beta_0'^2 + \beta_1'^2 + \beta_2'^2} + c = o.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingungsgleichung (10) erfüllt wird, wenn die gegebene Oberfläche $u = o$ von der zweiten Ordnung ist. Nehmen wir daher an, die gegebene Oberfläche sei das Ellipsoid:

$$(12)\ \ldots\ u = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0} - 1 = o.$$

so erhalten wir aus (11) die erste Integralgleichung der kürzesten Linie auf demselben:

$$\left\{\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_1^2}{(\alpha_1+\lambda_0)^2}+\frac{\beta_2^2}{(\alpha_2+\lambda_0)^2}\right\}\left\{\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0}\right\}$$
$$+ c\,\{d\beta_0^2+d\beta_1^2+d\beta_2^2\} = o,$$

oder mit Berücksichtigung der ersten Formel (25) der vorhergehenden Vorlesung und nach Multiplication mit B_0^2:

$$(13)\quad \left(\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0}\right)+c\,B_0^2(d\beta_0^2+d\beta_1^2+d\beta_2^2)=o.$$

Diese Differentialgleichung muss mit Zuziehung der Gleichung (12) des gegebenen Ellipsoides nochmals integrirt werden, wenn man die Oberfläche erhalten will, welche das gegebene Ellipsoid in der kürzesten Linie auf demselben schneidet. Doch bevor wir diese letzte Integration unternehmen, wollen wir eine geometrische Interpretation der vorliegenden Differentialgleichung (13) vorangehen lassen.

Die Differentialgleichung (13) von der ersten Ordnung, aber vom zweiten Grade, weil in ihr die Differentiale der Variabeln in der zweiten Potenz vorkommen, stellt bei unveränderlichem Werthe der Constante c nicht eine, sondern zwei verschiedene kürzeste Linien dar, welche von dem durch die Coordinaten β_0, β_1, β_2 bestimmten Punkte p des Ellipsoides (12) ausgehen. Sie stellt, wenn man die Differentiale $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ als variable rechtwinklige Coordinaten betrachtet einen Kegel zweiter Ordnung dar mit der Spitze p. Die Schnittlinien der Tangentenebene des Ellipsoides (12) in dem Punkte p und des Kegels sind die Tangenten der beiden von dem Punkte p ausgehenden kürzesten Linien auf dem Ellipsoid.

Um auf die Natur dieser beiden Tangenten näher einzugehen, transformiren wir die Gleichung des genannten Kegels, welche sich, wenn wir für $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ respective setzen x, y, z also darstellt:

$$\left(\frac{x^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{y^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{z^2}{\alpha_2+\lambda_0}\right)+c\,B_0^2(x^2+y^2+z^2)=o,$$

durch die Substitutionen (4) der vorhergehenden Vorlesung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, von welchem zwei Axen

in dem Punkte p Tangenten sind der von diesem Punkte ausgehenden Krümmungscurven des Ellipsoides.

Diese Transformation der beiden Theile der Kegelgleichung, aus welchen sie besteht, findet man bereits durchgeführt in (33) und (1) der vorhergehenden Vorlesung. Setzt man in der so transformirten Gleichung des Kegels $X = o$, um die Gleichung der Schnittlinien des Kegels und der Tangentenebene des Ellipsoides in dem Punkte p zu erhalten, so ergiebt sich:

$$-\frac{2}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_0} Y^2 - \frac{2}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \lambda_0} Z^2 + cB_0^2(Y^2 + Z^2) = o$$

als Gleichung der beiden Tangenten der kürzesten Linien in dem Punkte p auf dem Ellipsoid.

Aus der Form dieser Gleichung, in welcher nur die Quadrate der Variabeln vorkommen, ist ersichtlich, dass die neuen Coordinatenaxen die von den beiden Tangenten gebildeten Winkel halbiren. Deshalb hat man den Satz:

Die in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides sich senkrecht schneidenden beiden Krümmungscurven des Ellipsoides halbiren die Winkel, welche die durch denselben Punkt gehenden beiden kürzesten Linien bilden, die demselben Werthe der Constante c der ersten Integration entsprechen.

Es bleibt noch übrig, die beiden von dem Punkte p ausgehenden kürzesten Linien des Ellipsoides geometrisch zu definiren, welche demselben Werthe der Constante c der ersten Integration entsprechen. Zu diesem Zwecke, und um zugleich die letzte Integration der Differentialgleichung (13) der kürzesten Linie vorzubereiten, transformiren wir dieselbe in elliptische Coordinaten durch die Formeln (46) und (47) der vorhergehenden Vorlesung, welche in dem vorliegenden Falle, wo λ_0 eine gegebene Grösse, also $d\lambda_0 = o$ ist, die einfache Gestalt annehmen:

$$\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} = \frac{1}{4B_1^2}\cdot\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_0-\lambda_1} + \frac{1}{4B_2^2}\cdot\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_0-\lambda_2},$$

$$d\beta_0^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \frac{1}{4B_1^2}d\lambda_1^2 + \frac{1}{4B_2^2}d\lambda_2^2,$$

wenn wir berücksichtigen, dass: $\frac{2\partial B_1}{\partial \lambda_0} = \frac{B_1}{\lambda_1-\lambda_0}$ und $\frac{2\partial B_2}{\partial \lambda_0} = \frac{B_2}{\lambda_2-\lambda_0}$.

Durch diese Transformation geht die Differentialgleichung (13), wenn wir ferner berücksichtigen, dass nach (48) und (10) der vorhergehenden Vorlesung ist:

$$\Delta_0^2 = B_0^2 (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2),$$

$$\Delta_1^2 = B_1^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_1),$$

$$\Delta_2^2 = B_2^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_2),$$

und der Kürze wegen die neue Constante γ einführen durch die Gleichung:

$$(14) \quad \lambda_0 + c\Delta_0^2 = \gamma,$$

über in:

$$(15) \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 - \gamma} \frac{d\lambda_1^2}{\Delta_1^2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_2}{\gamma - \lambda_2} \frac{d\lambda_2^2}{\Delta_2^2} = 0.$$

Zerlegt man diese Differentialgleichung in ihre beiden linearen Factoren, so erhält man die derselben Constante c (wofür man auch die Constante γ nehmen kann) der ersten Integration entsprechenden Differentialgleichungen der von demselben Punkte des Ellipsoides ausgehenden kürzesten Linien auf demselben:

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \dfrac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \dfrac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \dfrac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \dfrac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \dfrac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \dfrac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0. \end{cases}$$

Da in diesen Gleichungen die Variabeln nur gesondert vorkommen, so kann man die Gleichungen integriren und erhält dadurch die von Jacobi gefundenen Gleichungen der Oberflächen selbst, welche das gegebene Ellipsoid (12) in den besprochenen kürzesten Linien schneiden:

$$(17) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = c_1, \\[2ex] \displaystyle\int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}}{\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}} \frac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \int \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = c_2. \end{cases}$$

Diese beiden kürzesten Linien auf dem Ellipsoid werden sich nun in einem Punkte p des Ellipsoides schneiden. Man kann aber auch die willkürlichen Constanten der Integration c_1 und c_2

so bestimmen, dass die kürzesten Linien sich in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides schneiden.

Nehmen wir nun an, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, dass die Constante γ der ersten Integration einen Werth habe, der zwischen $-\alpha_2$ und $-\alpha_1$ liegt, so schneidet jede der eben bestimmten kürzesten Linien die durch die Gleichung:

(18) . . . . $\lambda_1 - \gamma = o$

gegebene Krümmungscurve, und zwar die erstere in einem Punkte q_1, die andere in einem Punkte q_2.

Die elliptischen Coordinaten des ersten Schnittpunktes q_1 sind λ_0, $\lambda_1 = \gamma$, λ_2, von welchen die letztere Coordinate λ_2 in der ersten Gleichung (17) dadurch bestimmt ist, dass nach vollführter Integration λ_1 den Werth γ annimmt. Der dem Punkte q_1 unendlich nahe Punkt der kürzesten Linie hat die Coordinaten λ_0, $\gamma + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$ und zwischen $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$ besteht die erste Gleichung (16). Diese Gleichung giebt für $\lambda_1 = \gamma$ den entsprechenden Werth von $d\lambda_1 = o$ für die kürzeste Linie, und die Gleichung (18) $d\lambda_1 = o$ für die Krümmungscurve. Deshalb berührt die kürzeste Linie in dem Punkte q_1 die Krümmungscurve (18).

Ebenso berührt die zweite kürzeste Linie (17) dieselbe Krümmungscurve (18) in dem Punkte q_2, in welchem sie die genannte Curve trifft.

Hiernach stellt die Differentialgleichung (13) zwei kürzeste Linien auf dem Ellipsoid dar, welche ein und dieselbe Krümmungscurve des Ellipsoides berühren, und der oben angegebene Satz lässt sich rein geometrisch also wiedergeben:

Die in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides sich senkrecht schneidenden Krümmungscurven desselben halbiren in diesem Punkte die von den beiden durch ihn gehenden kürzesten Linien, welche irgend eine Krümmungscurve des Ellipsoides berühren, gebildeten Winkel.

Wir thun noch des Falles Erwähnung, wo die ultraelliptischen Differentiale in den Differentialgleichungen (16) der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid auf elliptische Differentiale zurückkommen.

Es ist dieses der Fall, wenn die willkürliche Constante c der Integration den Werth 0, und deshalb nach (14) die Constante γ den Werth λ_0 hat. Hierdurch reduciren sich die Differentialgleichungen (16) auf:

$$\frac{d\lambda_1}{\Delta_1} - \sqrt{-1}\,\frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_1}{\Delta_1} + \sqrt{-1}\,\frac{d\lambda_2}{\Delta_2} = 0,$$

und die Differentialgleichung (13) der kürzesten Linie, woraus diese Gleichungen durch Uebertragung in elliptische Coordinaten, hervorgegangen sind, auf:

$$\frac{d\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{d\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{d\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} = 0.$$

Es ist dieses offenbar die Differentialgleichung einer speciellen Art der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda_0} - 1 = 0.$$

Wir behaupten, dass sie die Differentialgleichung sei der geraden Linien auf dem Ellipsoid. Wir werden diese Behauptung dadurch rechtfertigen, dass wir nachweisen, wie die Gleichung jeder geraden Linie auf dem Ellipsoid der letzten Differentialgleichung genügt.

Zu diesem Zwecke drücken wir die Coordinaten β_0, β_1, β_2 eines beliebigen Punktes auf der geraden Linie, nach der Vorschrift von (7) der sechsten Vorlesung durch eine unabhängige Variable r aus, wie folgt:

$$\beta_0 = p_0 + q_0 r,$$

$$\beta_1 = p_1 + q_1 r,$$

$$\beta_2 = p_2 + q_2 r.$$

Soll nun diese durch die 6 Constanten $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2$ bestimmte gerade Linie auf dem Ellipsoid liegen, so muss, wenn man die Werthe der Coordinaten von β_0, β_1, β_2 in die Gleichung des Ellipsoides einsetzt, diese Gleichung unabhängig von dem Werthe von r erfüllt werden. Hieraus gehen folgende drei Bedingungen hervor:

$$\frac{p_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{p_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{p_2^2}{\alpha_2+\lambda_0}-1=0,$$

$$\frac{p_0q_0}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{p_1q_1}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{p_2q_2}{\alpha_2+\lambda_0}=0,$$

$$\frac{q_0^2}{\alpha_0+\lambda_0}+\frac{q_1^2}{\alpha_1+\lambda_0}+\frac{q_2^2}{\alpha_2+\lambda_0}=0.$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen erfüllt werden, so liegt die gerade Linie auf dem Ellipsoid. Da dieselben aber nicht alle 6 Constanten bestimmen, so hat man unendlich viele gerade Linien auf dem Ellipsoid. Für jede derselben hat man die Differentiale der Coordinaten:

$$d\beta_0=q_0dr,\quad d\beta_1=q_1dr,\quad d\beta_2=q_2dr,$$

welche auf Grund der zuletzt angegebenen Gleichung, in die Differentialgleichung der kürzesten Linie gesetzt, dieser Gleichung genügen.

Das Ellipsoid enthält nur imaginäre gerade Linien auf seiner Oberfläche, was die dritte der angegebenen Bedingungsgleichungen beweiset. Denn man kann keine reellen Werthe von q_0, q_1, q_2 finden, welche dieser Gleichung genügen. Ebenso kann man keine reellen Werthe von $d\beta_0$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ angeben, welche der Differentialgleichung der geraden Linie auf dem Ellipsoid genügen. Offen zu Tage tritt das Imaginäre in den beiden ersten durch elliptische Differentiale ausgedrückten Gleichungen der geraden Linien auf dem Ellipsoid.

Obgleich diese Gleichungen keine eigentliche geometrische Interpretation gestatten, so haben wir doch hier auf sie aufmerksam machen wollen, weil die gleiche Untersuchung der kürzesten Linien auf dem Hyperboloid mit einer Mantelfläche auf ähnliche, aber reelle Differentialgleichungen der geraden Linie auf dieser Oberfläche zurückführt.

Um die Länge s der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid auszudrücken, gehen wir zurück auf die Formel (49) der vorhergehenden Vorlesung, welche, wenn man den Werth von P aus (48) einsetzt, und bemerkt, dass in dem vorliegenden Falle $d\lambda_0=0$ ist, die Gestalt erhält:

$$ds^2=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\left\{(\lambda_0-\lambda_1)\frac{d\lambda_1^2}{A_1^2}+(\lambda_0-\lambda_2)\frac{d\lambda_2^2}{A_2^2}\right\}.$$

Setzt man in dieselbe den Werth von $d\lambda_1$ aus einer der Gleichungen (16) ein, so erhält man durch Ausziehen der Quadratwurzel:

$$ds = (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2A_2}$$
$$= (\gamma - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2A_2} + (\lambda_1 - \gamma) \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{(\gamma - \lambda_2)}} \frac{d\lambda_2}{2A_2}.$$

Benutzt man aber die Gleichungen (16), um die Variabeln zu sondern, so erhält man ds_1 für die eine kürzeste Linie, und ds_2 für die andere kürzeste Linie in der von Jacobi angegebenen Form:

$$(19)\quad \begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\frac{d\lambda_2}{2A_2} + \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\frac{d\lambda_1}{2A_1}, \\ ds_2 &= \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\frac{d\lambda_2}{2A_2} - \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\frac{d\lambda_1}{2A_1}. \end{aligned}$$

Die Länge s_1 der ersten kürzesten Linie wollen wir rechnen von dem Berührungspunkte derselben mit der Krümmungscurve (18), welcher die elliptischen Coordinaten habe $\lambda_1 = \gamma$ und $\lambda_2 = \lambda_2'$ bis zu dem Schnittpunkte p mit der zweiten kürzesten Linie, welcher die elliptischen Coordinaten habe λ_1 und λ_2. Die Länge s_2 der zweiten kürzesten Linie rechnen wir von dem zuletzt genannten Schnittpunkte p bis zum Berührungspunkte mit der Krümmungscurve (18), welcher die elliptischen Coordinaten $\lambda_1 = \gamma$ und $\lambda_2 = \lambda_2''$ habe. Alsdann erhalten wir durch Integration von (19):

$$(20)\quad \begin{aligned} s_1 &= \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2} \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\frac{d\lambda_2}{2A_2} + \int_{\gamma}^{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\frac{d\lambda_1}{2A_1}, \\ s_2 &= \int_{\lambda_2}^{\lambda_2''} \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\frac{d\lambda_2}{2A_2} - \int_{\lambda_1}^{\gamma} \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\frac{d\lambda_1}{2A_1}. \end{aligned}$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen:

$$(21) \ldots\ldots \quad s_1 + s_2 = \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''} \sqrt{(\gamma - \lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)}\frac{d\lambda_2}{2A_2}$$
$$+ 2\int_{\gamma}^{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_1)}\frac{d\lambda_1}{2A_1}.$$

Diese Summe wollen wir in Verbindung bringen mit der Länge des von den beiden Tangirungspunkten begrenzten Bogens der Krümmungscurve (18). Das Differentiale dieses Bogens s erhalten wir aus der letzten Gleichung (50) der vorhergehenden Vorlesung, wenn wir setzen s für a_2 und γ für λ_1, nämlich:

$$ds = \sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\varLambda_2},$$

woraus durch Integration zwischen den angegebenen Grenzen hervorgeht:

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s = \int_{\lambda'_2}^{\lambda''_2}\sqrt{(\gamma-\lambda_2)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2}{2\varLambda_2}.$$

Ziehen wir diese Gleichung von (21) ab, so erhalten wir:

$$(23) \quad \ldots \quad s_1 + s_2 - s = 2\int_{\gamma}^{\lambda_1}\sqrt{(\lambda_1-\gamma)}\sqrt{(\lambda_0-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1}{2\varLambda_1}.$$

Dieser Ausdruck von $s_1 + s_2 - s$ ist unabhängig von der elliptischen Coordinate λ_2 des Punktes p, in welchem sich die betrachteten kürzesten Linien auf dem Ellipsoid schneiden. Er bleibt ungeändert für alle Werthe dieser Coordinate, wenn nur die andere elliptische Coordinate einen bestimmten unveränderlichen Werth C_1 hat. Es beschreibt daher der Punkt p die Krümmungscurve:

$$\lambda_1 = C_1,$$

wenn der Ausdruck $s_1 + s_2 - s$ ungeändert bleibt.

Dem hierdurch bewiesenen Satze von M. Roberts kann man, wenn man die Eigenschaft der auf Oberflächen gespannten Fäden voraussetzt, dass sie sich in den kürzesten Linien der Oberflächen krümmen, folgenden Ausdruck geben:

Wenn man um eine Krümmungscurve eines gegebenen Ellipsoides einen geschlossenen Faden schlingt, und diesen Faden durch einen Stift auf dem Ellipsoide spannt, so beschreibt der Stift bei seiner Bewegung eine zweite Krümmungscurve des Ellipsoides von derselben Art.

Wir wollen noch bemerken, dass, im Falle die Krümmungscurve $\lambda_1 = C_1$, auf welcher der sich bewegende Punkt p liegt

der Krümmungscurve $\lambda_1 = \gamma$ unendlich nahe ist, das zweite Integral im Ausdrucke (21) wegen des Factors $\sqrt{(\lambda_1 - \gamma)}$ unter dem Integralzeichen gegen das erste unendlich klein wird, und dass im Grenzfalle, wenn beide Krümmungscurven zusammenfallen, die Ausdrücke (21) und (22) einander gleich werden.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Focalcurven der Oberflächen zweiter Ordnung.

Wenn die Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkt in rechtwinkligen Punktcoordinaten gegeben ist in der Form:

$$(1) \quad \frac{X^2}{\alpha_0} + \frac{Y^2}{\alpha_1} + \frac{Z^2}{\alpha_2} - P^2 = 0,$$

so ist nach der in der zweiundzwanzigsten Vorlesung aufgestellten Definition das System der mit ihr confocalen Oberflächen zweiter Ordnung gegeben:

$$(2) \quad \frac{X^2}{\alpha_0 + \lambda} + \frac{Y^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{Z^2}{\alpha_2 + \lambda} - P^2 = 0,$$

in welchem die gegebene Oberfläche selbst mit inbegriffen ist.

Durch Uebertragung dieser beiden Gleichungen nach der in der zehnten Vorlesung angegebenen Vorschrift in Ebenencoordinaten, nehmen dieselben die Gestalt an:

$$(3) \quad \alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2 = 0,$$

$$(4) \quad (\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) + \lambda (U^2 + V^2 + W^2) = 0.$$

Unter den durch die letzte Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ dargestellten confocalen Oberflächen giebt es auch Grenzflächen, für welche der Factor λ und die Coordinaten U, V, W, R der Ebenen, in welchen sie liegen, nach den Auseinandersetzungen der fünfzehnten Vorlesung durch folgende Gleichungen zu bestimmen sind:

$$(\alpha_0 + \lambda)\, U = 0, \quad (\alpha_2 + \lambda)\, W = 0,$$

$$(\alpha_1 + \lambda)\, V = 0, \quad R = 0.$$

Diesen 4 Gleichungen kann durch folgende 4 Werthe von λ genügt werden:

$$\lambda = \infty, \ \lambda = -\alpha_0, \ \lambda = -\alpha_1, \ \lambda = -\alpha_2$$

und dem entsprechen folgende 4 Grenzflächen:

$$(5) \ldots \begin{cases} U^2 + V^2 + W^2 = 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_0)\, V^2 + (\alpha_2 - \alpha_0)\, W^2 - R^2 = 0, \\ (\alpha_0 - \alpha_1)\, U^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\, W^2 - R^2 = 0, \\ (\alpha_0 - \alpha_2)\, U^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\, V^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Die erste derselben liegt in der Ebene, welche in das Unendliche fällt und entgeht daher der geometrischen Anschauung.

Die drei anderen Grenzflächen werden begrenzt durch die in Punktcoordinaten ausgedrückten Kegelschnitte:

$$(6) \ldots \begin{cases} \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_0} + \frac{Z^2}{\alpha_2 - \alpha_0} - P^2 = 0, \\ \frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_1} + \frac{Z^2}{\alpha_2 - \alpha_1} - P^2 = 0, \\ \frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - P^2 = 0, \end{cases}$$

von welchen jeder in einer der drei, die Hauptaxen der confocalen Oberflächen verbindenden, Ebenen liegt.

Denn betrachtet man zum Beispiel die in λ veränderliche Oberfläche (2) in dem Zustande, in welchem sie sich der vierten Grenzfläche nähert, indem man setzt $\lambda = -\alpha_2 + \varepsilon$, und versteht unter ε eine verschwindend kleine Grösse, so hat man die Gleichung der Oberfläche in Punktcoordinaten:

$$\frac{X^2}{\alpha_0 - \alpha_2 + \varepsilon} + \frac{Y^2}{\alpha_1 - \alpha_2 + \varepsilon} + \frac{Z^2}{\varepsilon} - P^2 = 0.$$

Aus welcher Gleichung zu ersehen ist, dass nur verschwindend kleine Werthe von Z derselben genügen können, und dass im Grenzfalle die dritte Gleichung (6) den in der XY-Ebene gelegenen Kegelschnitt ausdrückt, welcher die Grenzfläche begrenzt.

Schliesst man die im Unendlichen gelegene Grenzfläche aus, so bleiben noch drei endliche Grenzflächen übrig, welche von den drei Kegelschnitten (6) begrenzt werden.

Wenn man annimmt, dass:

(7) . . . . $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2$,

so wird der erste Kegelschnitt imaginär, der zweite eine Hyperbel, der letzte eine Ellipse.

Man nennt diese drei, die Grenzflächen der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung begrenzenden, Kegelschnitte die **Focalcurven** der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung. Die **Focalellipse** liegt in der Ebene der grössten und mittleren Axe der confocalen Ellipsoide, die **Focalhyperbel** liegt in der Ebene der grössten und kleinsten Axe, die **imaginäre Focalellipse** liegt in der Ebene der beiden kleinsten Axen der confocalen Ellipsoide.

Die Ebenen, in welchen die reellen Focalcurven liegen, stehen auf einander senkrecht, und die eine Focalcurve geht immer durch die Brennpunkte der anderen. Wir drücken die letztere Bemerkung so aus, „die beiden Punkte auf der einen reellen Focalcurve, welche in der Ebene der anderen liegen, sind die Brennpunkte der letzteren," um sie als einen speciellen Fall des allgemeinen Satzes aufzufassen:

Irgend zwei Punkte der einen reellen Focalcurve haben die Eigenschaft der Brennpunkte in Rücksicht auf die andere reelle Focalcurve, dass die Summe oder die Differenz der von ihnen nach einem veränderlichen Punkte der anderen reellen Focalcurve geführten Strahlen eine constante Grösse ist.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren wie folgt:

Wenn zwei Punkte im Raume die genannte Eigenschaft der Brennpunkte haben in Rücksicht auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt, so liegen diese beiden Punkte auf der dem Kegelschnitte entsprechenden zweiten Focalcurve.

Von der weiteren Begründung dieser beiden merkwürdigen Sätze können wir hier absehen, da wir von ihnen in dem Folgenden keinen Gebrauch machen werden.

Der Begriff der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, der bisher nur Oberflächen mit einem Mittelpunkte umfasste, lässt sich so erweitern, dass auch die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt hineingezogen werden. Diese Erweiterung des

Begriffes der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung werden wir ableiten von der in Ebenencoordinaten gegebenen Gleichung (4) der confocalen Oberflächen, in welcher wir für λ setzen $\frac{\lambda}{\mu}$ und mit μ multipliciren, wodurch wir erhalten:

(8) $\mu\,(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) + \lambda\,(U^2 + V^2 + W^2) = 0.$

Der erste Theil dieser Gleichung mit den 4 willkürlichen Constanten μ, α_0, α_1, α_2:

$$\mu\,(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2)$$

gleich 0 gesetzt, stellt irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte dar. Derselbe gehe durch die Substitutionen (32) der neunzehnten Vorlesung, durch welche allein die Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen beliebig geändert werden, über in die Function der zweiten Ordnung:

$$\mathfrak{F}\,(u, v, w, R)$$

mit den drei neu hinzukommenden willkürlichen Constanten, welche in jenen Substitutionen die Richtungen der neuen rechtwinkligen Coordinatenaxen bestimmen. Durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in einen Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten rücksichtlich des letzteren Coordinatensystemes die willkürlichen Constanten $-a$, $-b$, $-c$ seien, geht auf Grund von (8) der dreizehnten Vorlesung die genannte Function über in die Function:

$$\mathfrak{F}\,(u, v, w, r + au + bv + cw),$$

welche wir mit ihren 10 willkürlichen Constanten der Kürze wegen bezeichnen wollen mit:

$$F\,(u, v, w, r),$$

so dass man auf Grund der doppelten Transformation hat:

(9) . . . $\mu\,(\alpha_0 U^2 + \alpha_1 V^2 + \alpha_2 W^2 - R^2) = F\,(u, v, w, r).$

Was den zweiten Theil der Gleichung (8) anbetrifft, so weiss man, dass derselbe durch die doppelte Transformation übergeht in:

(10) . . . . . $\lambda\,(U^2 + V^2 + W^2) = \lambda\,(u^2 + v^2 + w^2).$

Es nimmt daher die Gleichung (8) der confocalen Oberflächen, auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, die Gestalt an:

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad F(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

indem die Gleichung $F(u, v, w, r) = 0$ irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte ausdrückt.

Wir erweitern nun den Begriff der confocalen Oberfläche zweiter Ordnung, wenn wir die Beschränkung, dass die Oberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ einen Mittelpunkt habe, aufheben, und als erweiterte Definition der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung folgenden Satz aufstellen:

Wenn $F(u, v, w, r) = 0$ der analytische Ausdruck irgend einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten ist, so drückt die Gleichung:

$$F(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

alle mit der gegebenen Oberfläche confocalen Oberflächen zweiter Ordnung aus.

Von dieser Regel machen die Oberflächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt keine Ausnahme. Vielmehr sieht man, wenn die zum Grunde gelegte Oberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ keinen Mittelpunkt hat, das ist nach (15) der dreizehnten Vorlesung, wenn das mit r^2 multiplicirte Glied in der Gleichung derselben fehlt, dass auch die mit ihr confocalen Oberflächen zweiter Ordnung keinen Mittelpunkt haben.

Der angegebene Satz bietet zugleich ein Mittel, das Problem der Hauptaxen einer in Ebenencoordinaten gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ aus einem ganz neuen Gesichtspunkte zu behandeln. Denn bestimmt man den Werth von λ in der Gleichung (11) so, dass die durch jene Gleichung dargestellte Oberfläche eine Grenzfläche wird, so weiss man, dass die Ebene dieser Grenzfläche durch zwei Hauptaxen der Oberfläche geht. Da man nun drei endliche Werthe von λ bestimmen kann, welche die Oberfläche (11) zu einer Grenzfläche machen, so hat man auch die drei Ebenen dieser Grenzflächen, welche sich paarweise in den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung schneiden und dadurch die Richtungen der Hauptaxen der gegebenen Oberfläche selbst.

Um mit wenig Worten die Durchführung dieser Idee anzudeuten, wollen wir annehmen, dass:

$$(12) \quad \ldots \quad F(u, v, w, r) = e_{00}u^2 + 2e_{01}uv + e_{11}v^2 + \ldots$$

Alsdann wird nach (3) der fünfzehnten Vorlesung die Oberfläche (11) jedesmal eine Grenzfläche, wenn man die Werthe von u, v, w, λ bestimmt, welche folgenden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen:

$$(13) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2} F'(u) + \lambda u &= 0, \\ \tfrac{1}{2} F'(v) + \lambda v &= 0, \\ \tfrac{1}{2} F'(w) + \lambda w &= 0, \\ \tfrac{1}{2} F'(r) + \lambda r &= 0, \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination der Ebenencoordinaten die in λ kubische Gleichung erhält:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} e_{00}+\lambda, & e_{01}, & e_{02}, & e_{03} \\ e_{10}, & e_{11}+\lambda, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}+\lambda, & e_{23} \\ e_{30}, & e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln eben jene Werthe von λ sind, welche die Oberfläche (11) zu einer Grenzfläche machen. Sind diese bekannt, so ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten der Ebenen, in welchen die drei Grenzflächen liegen, durch die Auflösung der in Rücksicht auf sie linearen Gleichungen (13).

Ist die gegebene Oberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ selbst eine Grenzfläche, also irgend ein Kegelschnitt, so führt die kubische Gleichung (14), weil ein Werth $\lambda = 0$ der Gleichung genügt, auf eine quadratische Gleichung zurück, und die, den beiden Wurzeln λ der quadratischen Gleichung entsprechenden, Ebenen schneiden die Ebene des Kegelschnittes in den Hauptaxen.

Die zum Grunde gelegte Oberfläche zweiter Ordnung (3) ist eine Rotationsoberfläche, wenn zwei von den drei Grössen α_0, α_1, α_2 einander gleich sind, und die der dritten von diesen Grössen entsprechende Hauptaxe ist die Rotationsaxe der Oberfläche. Die mit der gegebenen Rotationsoberfläche confocalen Oberflächen (4) sind wieder Rotationsoberflächen mit derselben Rotationsaxe.

Was die Focalcurven der Rotationsoberfläche anbetrifft, so ersieht man aus (6), dass eine derselben immer ein reeller oder imaginärer Kreis ist, und dass die beiden anderen gerade Linien werden, die in die Rotationsaxe fallen. Die eine

von diesen geraden Linien wird begrenzt von den Brennpunkten des Kegelschnittes, durch dessen Rotation die Oberfläche entstanden ist, die andere erstreckt sich von den Brennpunkten auf beiden Seiten der Rotationsaxe bis in das Unendliche.

Um einen ganz bestimmten Fall der Rotationsoberfläche (3) zur Discussion vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ sei. In dieser Voraussetzung wird die Gleichung (9):

$$(15) \quad \mu\alpha_1[U^2 + V^2 + W^2] - \mu[R^2 - (\alpha_0 - \alpha_1)\, U^2] = F(u, v, w, r).$$

Der Factor $R^2 - (\alpha_0 - \alpha_1)\, U^2$ des zweiten Gliedes in dieser Gleichung ist das Produkt zweier linearen Factoren A und A_1. Setzt man ferner $\mu\alpha_1 = \nu$, so hat man für die Rotationsoberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ die Form der Function $F(u, v, w, r)$:

$$(16) \quad \ldots \quad \nu(U^2 + V^2 + W^2) - \mu AA_1 = F(u, v, w, r),$$

in welcher $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Brennpunkte des Kegelschnittes bedeuten, durch dessen Rotation um die, die Brennpunkte verbindende, Gerade die Rotationsoberfläche erzeugt ist.

Der linke Theil dieser Gleichung geht über in seinen rechten Theil durch die doppelten oben angegebenen Substitutionen, durch welche man die identische Gleichung erhält:

$$(17) \quad \ldots \quad \nu(u^2 + v^2 + w^2) - \mu AA_1 = F(u, v, w, r),$$

indem A und A_1 lineare Ausdrücke bedeuten, von der Form:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} A &= \alpha u + \beta v + \gamma w + r, \\ A_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + r, \end{aligned}$$

welche, gleich 0 gesetzt, die Brennpunkte der Rotationsoberfläche $F(u, v, w, r) = 0$ darstellen.

Wenn daher eine durch ihre Gleichung $F(u, v, w, r) = 0$ in Ebenencoordinaten gegebene Oberfläche zweiter Ordnung, eine Rotationsoberfläche sein soll, so muss die Function $F(u, v, w, r)$ sich auf die in (17) angegebene Form zurückführen lassen.

Die Bedingungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung $F(u, v, w, r) = 0$ erhält man demnach, wenn man die Coefficienten der Potenzen und Produkte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung (17) einander gleich setzt, woraus 10 Gleichungen entstehen zwischen den 8 Unbekannten $\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, und aus diesen 10 Gleichungen die 8 Unbekannten eliminirt. Als

Resultat der Elimination erhält man dann zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten in der gegebenen Gleichung der Oberfläche. Es stimmt dieses überein mit den in der zwanzigsten Vorlesung über Rotationsoberflächen zweiter Ordnung gemachten Bemerkungen, auf Grund welcher sich auch zwei Bedingungsgleichungen (39) für die Rotationsoberfläche ergaben.

Es bedarf nicht der Aufstellung dieser beiden Bedingungsgleichungen; die angegebene Form:

$$(19) \quad \nu(u^2+v^2+w^2) - \mu A A_1 = 0$$

der Gleichungen der Rotationsoberflächen zweiter Ordnung reicht schon hin, Eigenschaften dieser Art Oberflächen zu entdecken.

Denn stellt man die Gleichung (19), in welcher $r = 1$ gesetzt werde, also dar:

$$(20) \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{A}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}},$$

so sieht man, dass jeder der beiden Factoren des rechten Theiles der Gleichung, nach (8) der fünften Vorlesung, seine geometrische Bedeutung hat. Dieselben drücken nämlich die Längen der Lothe aus, welche von den Brennpunkten $A = 0$ und $A_1 = 0$ auf eine Tangentenebene der Rotationsoberfläche gefällt sind. Da nun der linke Theil $\frac{\nu}{\mu}$ in der Gleichung eine constante Grösse ist, so hat man den Satz:

Das Produkt der von den beiden, in der Rotationsaxe liegenden, Brennpunkten einer Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auf die Tangentenebene der Oberfläche gefällten Lothe ist eine constante Grösse.

Bei der Zurückführung der Gleichung der Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auf die Form (19) kann es sich ereignen, dass beide lineare Factoren A und A_1 imaginär werden. In diesem Falle ist die Oberfläche erzeugt durch Umdrehung des Kegelschnittes um die Axe, in welcher die imaginären Brennpunkte liegen. Ferner kann in einem der Factoren A oder A_1 dasjenige Glied fehlen, welches den Factor r hat. In diesem Falle fehlt auch in der Entwickelung der Gleichung (19) das mit r^2 multiplicirte Glied und die Rotationsoberfläche ist dann, nach (15) der dreizehnten Vorlesung, eine Oberfläche ohne Mittelpunkt.

Schliessen wir nun die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit imaginären Brennpunkten aus, und verlegen den durch die Gleichung $A_1 = o$ gegebenen Brennpunkt der Oberfläche in den Coordinatenanfangspunkt, so haben wir $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = o$; wodurch die Gleichung (19) der Rotationsoberfläche die Gestalt erhält:

$$(21) \ldots u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\mu}{\nu}(au + bv + cw + 1) = o.$$

Diese Gleichung kann man ohne Schwierigkeit auf die Form bringen:

$$(22) \ldots (u - A)^2 + (v - B)^2 + (w - C)^2 - R^2 = o.$$

In dieser Form unterscheidet sich dieselbe von der Gleichung der Kugel mit dem Radius R und den Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes:

$$(23) \ldots (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2 = o$$

nur dadurch, dass die variabeln Ebenencoordinaten mit den variabeln Punktcoordinaten vertauscht sind.

Dieser Umstand kann dazu benutzt werden, um geometrische Sätze über Kugeln auf Rotationsoberflächen zu übertragen, welche einen Brennpunkt gemein haben, und umgekehrt aus Sätzen über Rotationsoberflächen, welche einen Brennpunkt gemein haben, entsprechende Sätze über Kugeln herzuleiten. Einfache Beispiele sollen dieses Uebertragungsprincip erläutern.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit K_μ und K_ν die Ausdrücke:

$$K_\mu = (x - A_\mu)^2 + (y - B_\mu)^2 + (z - C_\mu)^2 - R_\mu^2,$$
$$K_\nu = (x - A_\nu)^2 + (y - B_\nu)^2 + (z - C_\nu)^2 - R_\nu^2.$$

Der aus diesen Ausdrücken zusammengesetzte Ausdruck: $\frac{K_\mu - \lambda K_\nu}{1 - \lambda}$ kann auf eine gleiche Form K_ϱ gebracht werden, so dass man identisch hat:

$$K_\mu - \lambda K_\nu = (1 - \lambda) K_\varrho.$$

Da nun die Gleichungen $K_\mu = o$, $K_\nu = o$, $K_\varrho = o$ Kugeln vorstellen, so beweiset die angegebene identische Gleichung den Satz:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurven zweier Kugeln gehen, sind wieder Kugeln.

Zum Verständnisse dieses Satzes mag die Bemerkung dienen, dass sich zwei Kugeln nicht allein in einem Kreise schneiden, sondern noch in einem zweiten Kreise, der im Unendlichen liegt.

Betrachtet man dagegen die Punktcoordinaten als Ebenencoordinaten, so stellen die Gleichungen $K_\mu = o$, $K_\nu = o$, $K_\varrho = o$ Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte dar, und man erkennt in der angegebenen identischen Gleichung den Beweis des Satzes:

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche von den, zweien Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte gemeinschaftlichen, Tangentenebenen berührt werden, sind wieder Rotationsoberflächen mit demselben Brennpunkte.

Hat man ferner die Gleichungen von 4 Kugeln in Punktcoordinaten:

$$K_0 = o, \quad K_1 = o, \quad K_2 = o, \quad K_3 = o,$$

so stellen folgende sechs Gleichungen:

$$K_0 - K_1 = o, \quad K_1 - K_2 = o, \quad K_2 - K_3 = o,$$
$$K_0 - K_2 = o, \quad K_1 - K_3 = o,$$
$$K_0 - K_3 = o,$$

als lineare Gleichungen die Ebenen im Endlichen dar, in welchen sich je zwei Kugeln schneiden. Da aber aus den drei, in der ersten Horizontalreihe aufgeführten Gleichungen die drei übrigen folgen, so hat man nach (14) der zweiten Vorlesung den Satz:

Die sechs Ebenen, in welchen sich vier Kugeln paarweise schneiden, gehen durch einen und denselben Punkt.

Betrachtet man dagegen in den zehn aufgestellten Gleichungen die Punktcoordinaten als Ebenencoordinaten, so stellen die vier ersten Gleichungen vier Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit einem und demselben Brennpunkte dar. Jede der sechs darauf folgenden Gleichungen liefert den Beweis, dass zwei

Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte von einem und demselben Kegel zweiter Ordnung ringsum berührt werden, dessen Spitze nicht in dem Brennpunkte liegt. Denn der gemeinsame Brennpunkt ist immer die Spitze eines beiden Rotationsoberflächen gemeinsamen imaginären Tangentenkegels. Jene sechs Gleichungen sind die analytischen Ausdrücke für die Spitzen der sechs Kegel zweiter Ordnung, von welchen jeder zwei der genannten Rotationsoberflächen ringsum berührt. Da nun aus drei von diesen sechs Gleichungen die drei anderen folgen, so hat man nach (14) der fünften Vorlesung, mit Ausschluss des Brennpunktes als gemeinsamer Spitze imaginärer Tangentenkegel, den Satz:

Die Spitzen der sechs Kegel zweiter Ordnung, welche je zwei von vier Rotationsoberflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte ringsum berühren, liegen auf einer und derselben Ebene.

Wenn die Brennpunkte $A = o$ und $A_1 = o$ der Rotationsoberfläche (19) zusammenfallen, wenn also $A = A_1$, so wird die Rotationsoberfläche eine Kugel:

$$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\mu}{\nu} A^2 = o,$$

indem $A = o$ die Gleichung des Mittelpunktes und $\frac{\nu}{\mu}$ nach der geometrischen Interpretation der Gleichung (20) das Quadrat des Radius ϱ derselben ausdrückt. Es stellt sich demnach die Gleichung irgend einer Kugel in Ebenencoordinaten also dar:

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2} A^2 = o,$$

wenn ϱ der Radius der Kugel und $A = o$ die Gleichung des Mittelpunktes derselben in der Normalform ist.

Zu derselben Kugelgleichung in Ebenencoordinaten gelangt man auch auf folgendem directen Wege. Man weiss, dass die Gleichung der Kugel in Ebenencoordinaten, wenn ϱ der Radius derselben und der Mittelpunkt in dem Coordinatenanfangspunkte liegt, ist:

$$U^2 + V^2 + W^2 - \frac{1}{\varrho^2} R^2 = o,$$

in welcher Gleichung $R = o$ den Mittelpunkt der Kugel ausdrückt. Durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes vermit-

telst der Formeln (8) der dreizehnten Vorlesung geht diese Kugelgleichung über in die Form (24), in welcher $R = A = o$ die Gleichung des Mittelpunktes der Kugel ist.

Die angegebene Form der Kugelgleichung (24) werden wir benutzen zur Erörterung der Frage, ob unter den Tangentenkegeln einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung auch Rotationskegel gefunden werden.

Es sei: $F = o$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in Ebenencoordinaten und $\Phi = o$ die Gleichung einer noch unbestimmten Kugel, indem wir der Function Φ die Bedeutung unterlegen:

$$(24) \quad \ldots\ldots \Phi = u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2} A^2.$$

Wenn nun die gegebene Oberfläche einen Tangentenkegel hat, der zugleich Rotationskegel ist, so kann man eine Kugel $\Phi = o$ in den Rotationskegel hineinlegen, die von dem Kegel ringsum berührt wird, und umgekehrt, wenn man eine Kugel $\Phi = o$ bestimmen kann, welche von einem Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche ringsum berührt wird, so muss der Tangentenkegel ein Rotationskegel sein. Die Bedingung, dass Letzteres zutreffe, drückt nach der elften Vorlesung die identische Gleichung aus:

$$(25) \quad \ldots\ldots F - \mu \Phi = \lambda B C,$$

in welcher B und C lineare Ausdrücke der Ebenencoordinaten bedeuten.

Diese identische Gleichung zerfällt in zehn Bedingungsgleichungen. Eliminirt man aus letzteren die 7 in $\lambda B C$ steckenden Constanten und den Factor μ, so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten α, β, γ des durch die Gleichung $A = o$ ausgedrückten Mittelpunktes der Kugel und dem Radius ϱ derselben; und daraus die Gleichungen der Curve selbst, in welcher die Spitzen der Rotationskegel liegen, wenn man $\varrho = o$ setzt. Denn je kleiner ϱ wird, um so mehr nähert sich die Kugel der Kegelspitze, mit welcher sie im Grenzfalle zusammenfällt. Eliminirt man aber aus den beiden zuletzt genannten Gleichungen ϱ, so erhält man die Gleichung der Oberfläche, in welcher die Rotationsaxen der Tangentenkegel liegen.

Die Durchführung dieser Elimination ist nicht ohne Schwierigkeit, wenn die Function F in der allgemeinen Form gegeben ist. Wir wollen daher annehmen, dass die gegebene Oberfläche auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen bezogen sei, indem wir setzen:

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad F = \alpha_0 u^2 + \alpha_1 v^2 + \alpha_2 w^2 - r^2.$$

In dieser Voraussetzung wird die identische Gleichung (25):

$$(27) \left[\alpha_0 u^2 + \alpha_1 v^2 + \alpha_2 w^2 - r^2\right] - \mu\left[u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{\varrho^2}(\alpha u + \beta v + \gamma w + r)^2\right] = \lambda BC.$$

Man erkennt in dieser Form der Gleichung leicht die drei Bedingungen zwischen den fünf Grössen α, β, γ, μ, ϱ, welche zu erfüllen sind, wenn der linke Theil der Gleichung sich in lineare Factoren zerlegen lassen soll.

Macht man nämlich die Variable w verschwinden, indem man setzt:

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma = o, \quad \alpha_2 - \mu = o,$$

so lässt sich der übrig bleibende linke Theil der Gleichung in lineare Factoren zerlegen, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt wird:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 - \mu + \frac{\mu\alpha^2}{\varrho^2}, & \frac{\mu\alpha\beta}{\varrho^2}, & \frac{\mu\alpha}{\varrho^2} \\ \frac{\mu\alpha\beta}{\varrho^2}, & \alpha_1 - \mu + \frac{\mu\beta^2}{\varrho^2}, & \frac{\mu\beta}{\varrho^2} \\ \frac{\mu\alpha}{\varrho^2}, & \frac{\mu\beta}{\varrho^2}, & \frac{\mu}{\varrho^2} - 1 \end{vmatrix} = o,$$

deren linker Theil die Determinante ist, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten des übrig bleibenden linken Theiles der Gleichung (27).

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\varrho^2 + \mu\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \mu} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \mu} - 1\right\} = o,$$

und wenn man darin für μ den Werth aus (28) setzt:

$$(29) \quad \ldots\ldots \quad \varrho^2 + \alpha_2\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1\right\} = o.$$

Hiernach ist $\gamma = o$ die Gleichung der Oberfläche, in welcher die Rotationsaxen der Kegel, also auch ihre Spitzen liegen, das ist die xy Ebene des Coordinatensystemes. Setzen wir, um die zweite Oberfläche zu erhalten, in welcher die Kegelspitzen liegen, in (29) $\varrho = o$, so erhalten wir:

$$(30) \quad \frac{\alpha^2}{\alpha_0 - \alpha_2} + \frac{\beta^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1 = o.$$

Beide Oberflächen schneiden sich in der dritten Focalcurve (6) der gegebenen Oberfläche, welche demnach der geometrische Ort ist für die Spitzen der an die gegebene Oberfläche gelegten Tangentenkegel, welche zugleich Rotationskegel sind.

Aber man kann auch, um den linken Theil der Gleichung (27) in lineare Factoren zerfällbar zu machen, statt w entweder v oder u verschwinden lassen, indem man setzt $\beta = o$ und $\alpha_1 - \mu = o$, oder $\alpha = o$ und $\alpha_0 - \mu = o$, wodurch man schliesslich die beiden anderen Focalcurven der gegebenen Oberfläche als den geometrischen Ort der Spitzen der Tangentenkegel erhalten würde, die zugleich Rotationskegel sind. Man hat daher den Satz:

Die Focalcurven einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sind der geometrische Ort der Spitzen der Tangentenkegel für die gegebene Oberfläche, welche zugleich Rotationskegel sind.

Da sich jeder Kegelschnitt als Grenzfläche zweiter Ordnung betrachten lässt, so folgt aus dem angegebenen Satze unmittelbar:

Die einem gegebenen Kegelschnitt zugehörigen Focalcurven sind der geometrische Ort der Spitzen der Rotationskegel, welche durch den gegebenen Kegelschnitt gelegt werden können.

Was die Kugel anbetrifft, die wir uns in den Rotationskegel hineingelegt dachten, welcher zugleich Tangentenkegel der gegebenen Oberfläche ist, so haben wir zwischen den Coordinaten des Mittelpunktes α, β, γ und dem Radius ϱ derselben die Relationen (28) und (29), welche beweisen, dass man den Mittelpunkt O in der xy Ebene beliebig wählen kann, dass aber der Radius ϱ dann durch (29) bestimmt ist. Um diese Kugel und

die gegebene Oberfläche lassen sich aber zwei Rotationskegel legen, deren Spitzen auf Grund der identischen Gleichung (27) durch folgende linearen Gleichungen ausgedrückt werden: $B = o$, $C = o$.

Diese Kegelspitzen $B = o$, $C = o$ sind Punkte der Focalcurve (30) und die geraden Linien OB und OC die Rotationsaxen der beiden Kegel. Um die Lage dieser Rotationsaxen zu erforschen, stellen wir die Gleichung $\lambda BC = o$ der beiden Punkte auf, indem wir den durch die Gleichungen (28) reducirten linken Theil der identischen Gleichung (27) gleich o setzen:

$$[(\alpha_0 - \alpha_2)u^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)v^2 - r^2] + \frac{\alpha_2}{\varrho^2}[\alpha u + \beta v + r]^2 = o.$$

Der erste Theil in dieser Gleichung gleich o gesetzt:

$$(\alpha_0 - \alpha_2)u^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)v^2 - r^2 = o$$

stellt die Focalcurve (30) in Ebenencoordinaten dar, der zweite Theil ebenfalls gleich o gesetzt:

$$[\alpha u + \beta v + r]^2 = o$$

stellt ein Punktenpaar dar; welches zusammenfällt mit dem Punkte O. Deshalb drückt die aus den zuletzt genannten beiden Gleichungen zusammengesetzte erste Gleichung einen Kegelschnitt aus, welcher die beiden von dem Punkte O an die Focalcurve gezogenen Tangenten berührt. Da aber dieser Kegelschnitt in das Punktenpaar $B = o$, $C = o$ übergeht, welches in der Focalcurve liegt, so können die beiden Punkte nur die Berührungspunkte sein der von dem Punkte O an die Focalcurve gezogenen Tangenten. Es sind also die geraden Linien OB und OC Tangenten der Focalcurve. Man hat daher den Satz:

Der geometrische Ort der Rotationsaxen der Tangentenkegel einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung, welche zugleich Rotationskegel sind, sind die Ebenen, in welchen die Focalcurven der gegebenen Oberfläche liegen. Jede Rotationsaxe berührt die Focalcurve, in deren Ebene sie liegt, in der Spitze des Rotationskegels.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Geometrische Deutung der kubischen Gleichung $\Delta = o$, von welcher die Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängen.

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung einen Mittelpunkt hat, so lässt sich ihre in Punktcoordinaten gegebene Gleichung durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Mittelpunkt der Oberfläche mit Beibehaltung der Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen, wie man in der dreizehnten Vorlesung gesehen hat, immer auf die Form zurückführen:

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) - 1 = o,$$

in welcher Gleichung $\varphi(x, y, z)$ einen Ausdruck von der Form bedeutet:

$$(2) \quad \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy.$$

Durch Drehung des rechtwinkligen Coordinatensystemes um den Mittelpunkt der Oberfläche führten wir in der zwanzigsten Vorlesung, indem die Function $\varphi(x, y, z)$ ausgedrückt durch die neuen rechtwinkligen Coordinaten die Gestalt erhielt:

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2,$$

die Gleichung (1) der Oberfläche auf die Hauptaxen zurück:

$$(4) \quad \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 1 = 0,$$

indem $\frac{2}{\sqrt{\lambda_0}}, \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{2}{\sqrt{\lambda_2}}$ die Längen der Hauptaxen der Oberfläche ausdrücken.

Diese Hauptaxen hingen ab von der dort unter (11) angegebenen kubischen Gleichung $\Delta = o$, welche nach Potenzen von λ entwickelt:

$$(5) \quad -\Delta = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = o$$

folgende Werthe der Coefficienten giebt:

$$A = a_{00} + a_{11} + a_{22},$$

$$(6) \ldots . B = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{00} - a_{20}^2) + (a_{00}a_{11} - a_{01}^2),$$

$$C = a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{12}a_{20}a_{01} - a_{00}a_{12}^2 - a_{11}a_{20}^2 - a_{22}a_{01}^2.$$

Lässt man nun die sechs Coefficienten in der Function (2) $\varphi(x, y, z)$ beliebig variiren, so stellt die Gleichung (1) alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkt dar. Lässt man aber jene sechs Coefficienten unter der Beschränkung variiren, dass die Ausdrücke (6) A, B, C ungeändert bleiben, so stellt die Gleichung (1) nur solche Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche dieselben Hauptaxen haben, oder, mit anderen Worten, die Gleichung (1) ist unter der gemachten Voraussetzung der analytische Ausdruck für eine und dieselbe Oberfläche, beliebig gedreht um ihren Mittelpunkt.

Von der Voraussetzung ausgehend, dass A, B, C unveränderliche Grössen seien, wollen wir nun die geometrische Bedeutung dieser Grössen feststellen.

Bezeichnen wir mit P, Q, R die Längen der auf den Coordinatenaxen x, y, z von der Oberfläche (1) abgeschnittenen Stücke, so haben wir:

$$P^2 = \frac{1}{a_{00}}, \quad Q^2 = \frac{1}{a_{11}}, \quad R^2 = \frac{1}{a_{22}}.$$

Es ist demnach:

$$A = a_{00} + a_{11} + a_{22} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{R^2}.$$

Da aber A der Voraussetzung nach eine constante Grösse ist, so drückt diese Gleichung den Satz aus:

Wenn man um den Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung ein System von drei in dem Mittelpunkt auf einander senkrecht stehenden geraden Linien dreht, so ist die Summe der reciproken Quadrate der von der Oberfläche auf den geraden Linien abgeschnittenen Stücke eine constante Grösse.

Diese constante Grösse lässt sich näher bezeichnen. Denn wenn man das System von drei in dem Mittelpunkte der Oberfläche auf einander senkrecht stehenden Linien in die Lage der Hauptaxen bringt, so werden jene auf ihnen abgeschnittenen Stücke die Hauptaxen selber.

Als Corollar zu dem angegebenen Satze bezeichnen wir folgenden:

Wenn man um den Mittelpunkt eines Kegelschnittes einen rechten Winkel dreht, dessen Spitze im Mittelpunkte liegt, so ist die Summe der reciproken Quadrate der von dem Kegelschnitte auf den Schenkeln des rechten Winkels abgeschnittenen Stücke eine constante Grösse.

Dieser Satz geht hervor aus dem vorhergehenden, wenn man die Richtung der einen von den drei im Mittelpunkte der Oberfläche auf einander senkrecht stehenden geraden Linien ungeändert lässt, und die Drehung macht um diese ungeänderte gerade Linie.

Wir erhalten die Gleichung des Kegelschnittes, in welchem die yzEbene die Oberfläche (1) schneidet, wenn wir in der Gleichung der Oberfläche $x = o$ setzen:

$$a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + a_{22}z^2 - 1 = o.$$

Die Hauptaxen dieses Kegelschnittes hängen ab von der quadratischen Gleichung.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = o,$$

in welcher das von λ freie Glied gerade der erste Theil des Ausdruckes B in (6) ist:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Dieses Glied ist das Produkt der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, und da die Wurzeln jener Gleichung die reciproken Quadrate der halben Hauptaxen des Kegelschnittes ausdrücken, so stellt der letzte Ausdruck durch π^2 dividirt nach (39) der einundzwanzigsten Vorlesung das reciproke Quadrat des Flächeninhaltes des Kegelschnittes dar, wenn derselbe eine Ellipse ist.

Die Bedeutung der beiden anderen Glieder, aus welchen der Ausdruck B in (6) zusammengesetzt ist, ergiebt sich hiernach von selbst. Dividiren wir nun B durch π^2 und bemerken, dass bei der Drehung der Oberfläche um ihren Mittelpunkt der Quotient ungeändert bleibt, so haben wir den Satz:

Wenn man um den Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung drei in diesem Punkte auf einander senkrecht stehende Ebenen dreht, so schneiden die drei Ebenen die Oberfläche in drei Kegelschnitten, von welchen die Summe der reciproken Quadrate der Flächeninhalte eine constante Grösse ist.

Wenn einer von den drei Kegelschnitten eine Hyberbel oder Parabel wird, so hört die Gültigkeit des Satzes selbstverständlich auf. Er trifft aber wieder zu, wenn man die Drehung in der Weise bewerkstelliget, dass die Hyperbel oder Parabel ungeändert bleibt.

Was endlich die Bedeutung des Coefficienten C in der kubischen Gleichung $\Delta = o$ anbetrifft, so weiss man, dass derselbe gleich ist dem Produkt der drei Wurzeln der Gleichung, also gleich dem reciproken Produkt aus den Quadraten der halben Hauptaxen der Oberfläche. Dividirt man daher den Coefficienten C durch $(\frac{4}{3}\pi)^2$, so erhält man nach (56) der zweiundzwanzigsten Vorlesung das reciproke Quadrat des körperlichen Inhaltes des Oberfläche, vorausgesetzt, dass die Oberfläche ein Ellipsoid ist.

Die Mittelpunktgleichung der Oberfläche zweiter Ordnung durch Ebenencoordinaten ausgedrückt, erhält man, wenn man die, der Function $\varphi(x, y, z)$ reciproke Function $\Phi(u, v, w)$ bildet, und hierauf setzt:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Phi(u, v, w) - 1 = o.$$

Wenn wir von dieser durch Ebenencoordinaten ausgedrückten Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte ausgehen, so können wir ebenfalls die kubische Gleichung $\nabla_\ = o$ angeben, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen. Die geometrische Deutung der Coefficienten in dieser kubischen Gleichung muss auf Sätze führen, die den vorhergehenden Sätzen analog sind.

Wir bemerken, um die angegebene Idee zu verwirklichen, dass, während die Substitutionen (14) der neunzehnten Vorlesung

die Function $\varphi(x, y, z)$ transformiren in (3), die Substitutionen (33 derselben Vorlesung die reciproke Function $\Phi(u, v, w)$:

$$(8)\quad \Phi(u, v, w) = e_{00}u^2 + e_{11}v^2 + e_{22}w^2 + 2e_{12}vw + 2e_{20}wu + 2e_{01}uv,$$

nach den Auseinandersetzungen in der achtzehnten Vorlesung transformiren in:

$$(9)\quad \ldots\ldots \Phi(u, v, w) = \frac{U^2}{\lambda_0} + \frac{V^2}{\lambda_1} + \frac{W^2}{\lambda_2}.$$

Es ist demnach:

$$(10)\quad \ldots\ldots \frac{U^2}{\lambda_0} + \frac{V^2}{\lambda_1} + \frac{W^2}{\lambda_2} - 1 = o$$

die Gleichung der Oberfläche (7), bezogen auf das Hauptaxensystem dieser Oberfläche, und die kubische Gleichung $F = o$, von welcher die Transformation abhängt, ist:

$$(11)\quad \ldots\ldots F = \begin{vmatrix} e_{00} - \frac{1}{\lambda}, & e_{01}, & e_{02} \\ e_{10}, & e_{11} - \frac{1}{\lambda}, & e_{12} \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22} - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = o.$$

Wenn wir diese Gleichung entwickeln, wie folgt:

$$(12)\quad \ldots\ldots -F = \frac{1}{\lambda^3} - a\frac{1}{\lambda^2} + b\frac{1}{\lambda} - c = o,$$

so finden wir die Werthe der Coefficienten a, b, c:

$$(13)\quad \begin{aligned} a &= e_{00} + e_{11} + e_{22}, \\ b &= (e_{11}e_{22} - e_{12}^2) + (e_{22}e_{00} - e_{20}^2) + (e_{00}e_{11} - e_{01}^2), \\ c &= e_{00}e_{11}e_{22} + 2e_{12}e_{20}e_{01} - e_{00}e_{12}^2 - e_{11}e_{20}^2 - e_{22}e_{01}^2. \end{aligned}$$

Wir lassen nun die sechs Coëfficienten e in der Gleichung (7) der Oberfläche beliebig variiren und erhalten dadurch alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkte. Beschränken wir aber diese Variationen, indem wir festsetzen, dass die drei Coefficienten a, b, c in (13) unverändert bleiben, so stellt die Gleichung (7) eine und dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung dar in allen möglichen Lagen nach der Drehung um den Mittelpunkt.

Die verschiedenen Lagen einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung wollen wir nun in das Auge fassen.

Zu diesem Zwecke legen wir drei Tangentenebenen an die Oberfläche (7) den Coordinatenebenen parallel, und bestimmen die senkrechten Abstände p, q, r derselben von dem Mittelpunkte der Oberfläche aus der Gleichung (7):

$$p^2 = e_{00}, \quad q^2 = e_{11}, \quad r^2 = e_{22}.$$

Hiernach ist:

$$a = e_{00} + e_{11} + e_{22} = p^2 + q^2 + r^2,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes der Oberfläche zweiter Ordnung von irgend drei auf einander senkrecht stehenden Tangentenebenen derselben eine constante Grösse ist.

Wir können diesen Satz auch so auffassen:

Der geometrische Ort des Schnittpunktes dreier, auf einander senkrecht stehenden Tangentenebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung ist eine Kugel, deren Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der Oberfläche liegt.

Wenn wir, indem wir in der Gleichung (7) der Oberfläche $u = o$ setzen, die Oberfläche senkrecht auf die yz Ebene projiciren, so erhalten wir die Gleichung der Projection:

$$e_{11} v^2 + 2 e_{12} vw + e_{22} w^2 - 1 = o,$$

welche einen Kegelschnitt ausdrückt, dessen Hauptaxen von der quadratischen Gleichung abhängen:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \frac{1}{\lambda}, & e_{12} \\ e_{21}, & e_{22} - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = o.$$

Das in der Entwickelung dieser Gleichung nach Potenzen von $\frac{1}{\lambda}$ mit der 0ten Potenz multiplicirte Glied:

$$e_{11} e_{22} - e_{12}^2,$$

welches den ersten Theil des Ausdruckes b in (13) bildet, ist das Quadrat des Productes der Hauptaxen des Kegelschnittes. Wir erhalten daher das Quadrat des Flächeninhaltes der Projection, wenn wir jenen Ausdruck noch mit π^2 multipliciren.

Multipliciren wir nun die ganze zweite Gleichung (13) mit π^2 und bemerken, dass $a\pi^2$ sich bei der Drehung der Oberfläche um den Mittelpunkt nicht ändert, so ergiebt sich aus der geometrischen Deutung der einzelnen Theile jener Gleichung der Satz:

Wenn man eine Oberfläche zweiter Ordnung auf irgend drei auf einander senkrecht stehende Ebenen projicirt, so ist die Summe der Quadrate der senkrechten Projectionen eine constante Grösse.

Es lässt sich dieser Satz als eine Ausdehnung des Satzes (5) der ersten Vorlesung auffassen. Denn verstehen wir unter Flächeninhalt einer Oberfläche zweiter Ordnung die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der senkrechten Projectionen der Oberfläche auf bestimmte drei, auf einander senkrecht stehende, Ebenen und bezeichnen dieselben mit Δ; bezeichnen wir ferner mit A, B, C die senkrechten Projectionen der Oberfläche auf irgend drei auf einander senkrecht stehende Ebenen, so haben wir jene in (5) der ersten Vorlesung aufgeführte Gleichung, die dort nur Geltung hatte, wenn die Oberfläche zweiter Ordnung eine Grenzfläche ist.

Der angegebene Satz gilt ohne Einschränkung für das Ellipsoid. Ist bei einer anderen Oberfläche zweiter Ordnung eine der senkrechten Projectionen der Oberfläche eine Hyperbel oder Parabel, so verlangt der Satz eine leicht anzugebende Modification.

Was endlich den Coefficienten c in der kubischen Gleichung (12) anbelangt, so weiss man, dass derselbe das Quadrat ist des Productes der halben Hauptaxen der Oberfläche. Multiplicirt man diesen Coefficienten mit $(\frac{4}{3}\pi)^2$, so erhält man nach (56) der zweiundzwanzigsten Vorlesung das Quadrat des körperlichen Inhaltes der Oberfläche, vorausgesetzt, dass die Oberfläche ein Ellipsoid ist.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Bedingungen für die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung.

Bei Gelegenheit der Hauptaxenbestimmung einer durch ihre Gleichung $f(x, y, z, 1) = 0$ gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung in der zwanzigsten Vorlesung haben wir die Bedingungen (39) $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung festgestellt, welche, mit Hülfe von (27) durch die Coefficienten in der gegebenen Gleichung ausgedrückt, folgende Gestalt erhalten:

$$\frac{a_{01}\,a_{02} - a_{00}\,a_{12}}{a_{12}} = \frac{a_{12}\,a_{10} - a_{11}\,a_{20}}{a_{20}} = \frac{a_{20}\,a_{21} - a_{22}\,a_{01}}{a_{01}}.$$

Wir werden im Folgenden, indem wir die Entstehung der Rotationsoberflächen zweiter Ordnung ins Auge fassen, dieselben Bedingungsgleichungen auf einem anderen Wege herleiten.

Eine Rotationsoberfläche entsteht im Allgemeinen, wenn eine Curve sich um eine feste Axe dreht. Die Curve beschreibt dann die Rotationsoberfläche, indem jeder Punkt derselben einen Kreis durchläuft, dessen Ebene senkrecht steht auf der Rotationsaxe und dessen Mittelpunkt auf der Rotationsaxe liegt. Daher schneiden alle auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebenen die Rotationsoberfläche in Kreisen, deren Mittelpunkte in der Rotationsaxe liegen. Die Rotationsoberfläche zweiter Ordnung wird von jeder auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene nur in einem Kreise geschnitten, weil eine jede gerade Linie in der Ebene des Kreises die Oberfläche nur in zwei Punkten schneidet.

Dieses vorausgeschickt, sei nun:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, 1) = 0$$

die Gleichung irgend einer Rotationsoberfläche zweiter Ordnung, indem wir festsetzen, dass:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} f(x, y, z, 1) &= \varphi(x, y, z) + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}, \\ \varphi(x, y, z) &= a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy. \end{aligned}$$

Es seien ferner:

$$(3) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A_0 &= \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta_0 = 0, \\ A_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta_1 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen von zwei beliebigen, auf der Rotationsaxe der Oberfläche (1) senkrecht stehenden, Ebenen in der Normalform, welche die Oberfläche also in Kreisen schneiden. Da die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, die Rotationsaxe, senkrecht auf den Ebenen steht, in welchen sie liegen, so wird man, wenn man setzt:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad K = (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2,$$

immer eine Kugel $K = 0$ bestimmen können, auf welcher beide Kreise liegen.

Man hat daher drei Oberflächen zweiter Ordnung, die gegebene Oberfläche (1) $f(x, y, z, 1) = 0$, die Kugel $K = 0$ und das Ebenenpaar $A_0 A_1 = 0$, von welchen jede durch die Schnittcurve der beiden anderen geht, und daher nach den Auseinandersetzungen in der neunten Vorlesung die identische Gleichung:

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, 1) - \lambda K = \mu A_0 A_1.$$

Diese identische Gleichung ist die Bedingung für die Rotationsoberfläche (1). Das will sagen, dass die Oberfläche (1) eine Rotationsoberfläche sei, wenn die elf Constanten $\lambda, A, B, C, R, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta_0, \delta_1$ sich so bestimmen lassen, dass der Gleichung (5) identisch genügt wird.

Da zwischen den Constanten α, β, γ noch die Gleichung besteht $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, so vertreten die elf Constanten nur die Stelle von zehn Constanten, welche durch eben so viele Gleichungen bestimmt werden. Da aber die identische Gleichung (5) durch Gleichsetzen der Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln sich in zehn Bedingungsgleichungen auflöst; so hat es den Anschein, als könne diesen zehn Gleichungen immer genügt werden, welcher Art auch die gegebene Oberfläche (1) sei. Allein, wenn man beachtet, dass in die sechs Bedingungsgleichungen, welche sich durch Gleichsetzung der correspondirenden Glieder der zweiten Ordnung in der identischen Gleichung (5) ergeben, nur die fünf Constanten $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ eingehen, zwischen welchen noch die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ besteht, so sieht man,

dass durch Elimination der fünf Constanten aus den sieben Gleichungen sich zwei Bedingungsgleichungen ergeben müssen.

Setzen wir nämlich die correspondirenden Glieder der zweiten Ordnung in der identischen Gleichung (5) einander gleich, so erhalten wir:

$$(6) \ldots \ldots \quad \begin{aligned} a_{00} - \lambda &= \mu\alpha^2, & a_{12} &= \mu\beta\gamma, \\ a_{11} - \lambda &= \mu\beta^2, & a_{20} &= \mu\gamma\alpha, \\ a_{22} - \lambda &= \mu\gamma^2, & a_{01} &= \mu\alpha\beta, \end{aligned}$$

Gleichungen, in welche nur die vier Constanten λ, $\alpha\sqrt{\mu}$, $\beta\sqrt{\mu}$, $\gamma\sqrt{\mu}$ eingehen. Wir brauchen die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ nicht weiter zu berücksichtigen, welche dazu dienen würde, den Werth von μ festzustellen. Denn die Elimination dieser vier Constanten aus den sechs Gleichungen (6) giebt ebenfalls die beiden Bedingungsgleichungen. Um letztere zu erhalten, multipliciren wir je zwei von den drei letzten Gleichungen (6) und dividiren sie durch die übrig bleibende. Dadurch wird:

$$(7) \ldots \quad \frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}} = \mu\alpha^2, \quad \frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}} = \mu\beta^2, \quad \frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}} = \mu\gamma^2,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die drei ersten Gleichungen (6) erhalten wir die oben angegebenen beiden Bedingungsgleichungen für die Rotationsoberfläche (1):

$$(8) \ldots \ldots \quad \lambda = a_{00} - \frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}} = a_{22} - \frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}}$$

zugleich mit dem Werthe von λ.

Handelt es sich um die Richtung der Rotationsaxe, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus sind α, β, γ, so hat man auf Grund von (7):

$$(9) \ldots \ldots \quad \begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}}} : \sqrt{\frac{a_{12}a_{10}}{a_{20}}} : \sqrt{\frac{a_{20}a_{21}}{a_{01}}}, \\ \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{a_{12}} : \frac{1}{a_{20}} : \frac{1}{a_{01}}, \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit (36) der zwanzigsten Vorlesung, wobei zu erwähnen ist, dass die Quadratwurzelgrössen sämmtlich das gleiche Vorzeichen haben müssen, damit sie den drei letzten Gleichungen (6) genügen.

Wir sehen hier zwei Bedingungsgleichungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung auftreten, während die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Glei-

chung $\Delta = o$, von welcher die Hauptaxen der Oberfläche abhängen, für sich schon hinreicht, die Oberfläche zu einer Rotationsoberfläche zu machen. Die Erklärung dieses Paradoxons wird den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

Auf ein ähnliches Paradoxon stösst man schon beim Kreise in der Ebene. Man weiss nämlich, dass der Kegelschnitt:

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = o$$

nur unter den beiden Bedingungen:

$$a_{00} = a_{11}, \quad a_{01} = o$$

ein Kreis ist, während schon die eine Bedingungsgleichung:

$$(a_{00} + a_{11})^2 - 4(a_{00}a_{11} - a_{01}^2) = o$$

der Gleichheit der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = o,$$

von welcher die Hauptaxen des Kegelschnittes abhängen, hinreicht, um den Kegelschnitt in einen Kreis übergehen zu lassen.

Man braucht aber nur jene Bedingungsgleichung in die Form der Summe zweier Quadrate zu bringen:

$$(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2 = o,$$

um zu sehen, dass die eine Bedingungsgleichung in die beiden angegebenen Bedingungsgleichungen zerfällt.

Eine ähnliche Zerfällung der Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$ in die Summe von Quadraten lässt sich nach der Analogie erwarten, und Kummer führte sie, wenn gleich auf einem beschwerlichen Wege, zuerst durch.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Aufstellung der Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$.

Die Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung erhält man bekanntlich dadurch, dass man die gegebene Gleichung nach der in ihr vorkommenden Unbekannten partiell differenzirt und aus beiden Gleichungen die Unbekannte eliminirt. Ist die gegebene Gleichung eine algebraische vom $n$ten Grade, so wird die differenzirte Gleichung vom

$(n-1)$ten Grade. Die allgemeinen Methoden der Elimination der Unbekannten aus diesen Gleichungen geben jedesmal eine resultirende Gleichung, welche einen überflüssigen Factor enthält. Dieser überflüssige Factor wird vermieden, wenn man für die genannten Gleichungen zwei ihnen äquivalente Gleichungen, beide vom $(n-1)$ten Grade, in folgender Weise substituirt.

Man mache die gegebene Gleichung vom $n$ten Grade dadurch homogen, dass man in ihr für die Unbekannte λ setzt $\frac{\lambda}{\varkappa}$, und die Gleichung mit $\varkappa^n$ multiplicirt. Aus dieser Gleichung geht wieder die gegebene Gleichung hervor, wenn man für $\varkappa$ den Werth setzt $\varkappa = 1$, welchen Werth von $\varkappa$ wir auch in dem Folgenden beibehalten werden. Wenn nun die gegebene homogen gemachte Gleichung ist:

$$\psi(\varkappa, \lambda) = o,$$

so hat man für die gleiche Wurzel λ überdies:

$$\psi'(\lambda) = o.$$

Da aber:

$$n\psi(\varkappa, \lambda) = \varkappa\psi'(\varkappa) + \lambda\psi'(\lambda) = o,$$

so sieht man, dass für die gleiche Wurzel auch ist:

$$\psi'(\varkappa) = o.$$

Man hat daher für die gleiche Wurzel die beiden Gleichungen vom $(n-1)$ten Grade:

$$\psi'(\varkappa) = o, \quad \psi'(\lambda) = o,$$

aus welchen die Unbekannte λ zu eliminiren ist, während man früher die Elimination aus einer Gleichung des $n$ten und einer zweiten Gleichung des $(n-1)$ten Grades zu vollführen hatte, um die gesuchte Bedingungsgleichung zu erhalten.

Nach der Bezout-Sylvester'schen Methode kommt die Elimination der Unbekannten λ aus den beiden letzten Gleichungen darauf hinaus, die Elimination der $(2n-2)$ ersten Potenzen von λ, mit Einschluss der 0ten Potenz, aus folgenden $(2n-2)$ Gleichungen:

$$\psi'(\lambda) = o, \quad \lambda\psi'(\lambda) = o, \quad \ldots \quad \lambda^{n-2}\psi'(\lambda) = o,$$
$$\psi'(\varkappa) = o, \quad \lambda\psi'(\varkappa) = o, \quad \ldots \quad \lambda^{n-2}\psi'(\varkappa) = o,$$

wie aus linearen homogenen Gleichungen zu vollführen.

Setzen wir nun, um die angegebene Regel auf den Fall der kubischen Gleichung $\Delta = o$ anzuwenden:

$$\psi(x, \lambda) = -\Delta = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C,$$

so haben wir unter der Voraussetzung, dass x den Werth 1 habe:

$$\psi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2A\lambda^1 + B\lambda^0,$$

$$-\psi'(x) = A\lambda^2 - 2B\lambda^1 + 3C\lambda^0,$$

und daher die Elimination der Potenzen $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ aus den, in Rücksicht auf sie linearen homogenen, Gleichungen auszuführen:

$$\begin{aligned} 3\lambda^3 - 2A\lambda^2 + B\lambda^1 \qquad\qquad & = o, \\ + 3\lambda^2 - 2A\lambda^1 + B\lambda^0 & = o, \\ + A\lambda^2 - 2B\lambda^1 + 3C\lambda^0 & = o, \\ A\lambda^3 - 2B\lambda^2 + 3C\lambda^1 \qquad\qquad & = o. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $3L^2$ die Determinante:

$$(10) \quad \ldots \quad 3L^2 = \begin{vmatrix} 3, & -2A, & +B, & o \\ o, & 3, & -2A, & +B \\ o, & +A, & -2B, & +3C \\ A, & -2B, & +3C, & o \end{vmatrix},$$

so haben wir als Resultat der Elimination die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad L^2 = o$$

für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$.

Um die aufgestellte Bedingungsgleichung (11) weiter zu transformiren, werden wir der Determinante (10) $3L^2$ nach und nach andere Formen geben.

Wir benutzen zu diesem Zwecke die Relationen zwischen den Potenzsummen $s_0, s_1, \ldots s_4$ der Wurzeln und den Coefficienten der kubischen Gleichung $\Delta = o$:

$$
\begin{aligned}
s_0 \qquad\qquad\qquad\quad &= 3, \\
s_1 - As_0 \qquad\qquad &= -2A, \\
s_2 - As_1 + Bs_0 \qquad &= B, \\
s_3 - As_2 + Bs_1 - Cs_0 &= o, \\
s_4 - As_3 + Bs_2 - Cs_1 &= o\,^{*}),
\end{aligned}
$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar folgt:

$$
\begin{aligned}
s_1 \qquad\qquad &= A, \\
s_2 - As_1 \qquad &= -2B, \\
s_3 - As_2 + B &= 3C.
\end{aligned}
$$

---

*) Die angegebenen Formeln leitet man leicht aus der in λ identischen Gleichung:

$$-\Delta = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

in folgender Weise ab:

Die angegebene identische Gleichung, differenzirt nach λ:

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1),$$

dividirt man durch die angegebene Gleichung, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} + \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2}.$$

Jeden Bruch des rechten Theiles dieser Gleichung entwickelt man nach absteigenden Potenzen von λ, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\left\{\begin{array}{l} 1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + \ldots \\ 1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \ldots \\ 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2 + \ldots \end{array}\right.$$

und durch Summation:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\left\{s_0 + \frac{s_1}{\lambda} + \frac{s_2}{\lambda^2} + \ldots\right.$$

oder:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \Delta\left\{s_0 + \frac{s_1}{\lambda} + \frac{s_2}{\lambda^2} + \ldots\right.$$

Setzt man in diese in λ identische Gleichung für Δ und $\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}$ ihre Werthe:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C, \\
\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} &= -3\lambda^2 + 2A\lambda - B,
\end{aligned}
$$

so erhält man durch Gleichsetzen der Coefficienten gleicher Potenzen von λ auf beiden Seiten der Gleichung die oben angegebenen Gleichungen und noch mehrere der Art.

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich die Determinante (10) $3L^2$ so ausdrücken:

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 - As_0, & s_2 - As_1 + Bs_0, & s_3 - As_2 + Bs_1 - Cs_0 \\ 0, & s_0, & s_1 - As_0, & s_2 - As_1 + Bs_0 \\ 0, & s_1, & s_2 - As_1, & s_3 - As_2 + Bs_1 \\ s_1, & s_2 - As_1, & s_3 - As_2 + Bs_1, & s_4 - As_3 + Bs_2 - Cs_1 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber wieder nach Satz (30) der siebenten Vorlesung gleich:

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ 0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Zieht man in der so dargestellten Determinante $3L^2$ die dritte Horizontalreihe der Componenten von der ersten Horizontalreihe ab, so erhält man nach dem angegebenen Satze:

$$3L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ 0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix},$$

und endlich nach dem Satze (14) der siebenten Vorlesung, wenn man zugleich für s_0 seinen Werth 3 setzt:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad L^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Beachtet man aber, dass:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad s_p = \lambda_0^p + \lambda_1^p + \lambda_2^p,$$

so hat man nach Satz (31) der siebenten Vorlesung:

$$(14) \ldots L^2 = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix}.$$

und da man hat:

$$(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix},$$

so ist:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad L^2 = \left\{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)\right\}^2.$$

Es ist dieses gerade der Ausdruck L^2 für $n = 2$, den wir in (38) der achtzehnten Vorlesung in die Summe von Quadraten zerlegt haben. Da nun dieser Ausdruck L^2 nicht verschwinden kann, wenn nicht jedes einzelne Quadrat, woraus er besteht, verschwindet, so sieht man, dass die eine Bedingungsgleichung (11) $L^2 = o$ für die Gleichheit zweier Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$ in mehrere zerfällt, wodurch das oben hervorgehobene Paradoxon erklärt ist.

Wenn hiernach die Zerlegung des Ausdruckes L^2 in die Summe von Quadraten theoretisch keine Schwierigkeiten macht, so bedarf es doch mannigfacher Reductionen, um die Quadrate, in deren Summe sich der Ausdruck L^2 zerlegt, auf die einfachsten, von Kummer angegebenen, Formen zurückzuführen. Wir werden daher den in der achtzehnten Vorlesung eingeschlagenen Weg der Zerlegung des Quadrates L^2 in dem Folgenden ein wenig modificiren.

Zu diesem Zwecke stellen wir die Determinante $\pm L$:

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \pm L = \begin{vmatrix} \lambda_0^0, & \lambda_1^0, & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1, & \lambda_1^1, & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2, & \lambda_1^2, & \lambda_2^2 \end{vmatrix},$$

die ungeändert bleibt, wenn man irgend eine der Verticalreihen der Componenten durch ein und dieselbe Grösse dividirt und die Determinante selbst mit derselben Grösse multiplicirt, also dar:

$$\mp L = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \end{vmatrix},$$

und bemerken, dass das Produkt $\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2$ der drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = o$ nach (10) der zwanzigsten Vorlesung gleich ist:

$$(17) \ldots\ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

weshalb man auch hat:

$$(18) \ldots\ldots \quad \mp L = D \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \end{vmatrix}.$$

Das Quadrat dieses Ausdruckes $\mp L$, dargestellt als eine Function der Coefficienten in der durch (2) gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$, werden wir nun zerlegen in die Summe von Quadraten.

Zu diesem Zwecke bringen wir in Erinnerung, dass in der zwanzigsten Vorlesung die Substitutionen mit ihren Auflösungen:

$$(19) \ldots \quad \begin{array}{ll} x = aX + a'Y + a''Z, & X = ax + by + cz, \\ y = bX + b'Y + b''Z, & Y = a'x + b'y + c'z, \\ z = cX + c'Y + c''Z, & Z = a''x + b''y + c''z \end{array}$$

so bestimmt worden sind, dass sie folgende drei Gleichungen zu identischen Gleichungen machen:

$$(20) \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ \Phi(x, y, z) = \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2}, \end{array}$$

wenn $\Phi(x, y, z)$ die reciproke Function von $\varphi(x, y, z)$ ist. Denn die letzte von diesen Gleichungen folgt unmittelbar aus den in der achtzehnten Vorlesung vorgetragenen allgemeinen Sätzen.

Dieses vorausgeschickt bilden wir nun die Determinante $[a]$:

$$(21) \ldots \quad [a] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\varphi'(x), & \frac{1}{2}\varphi'(y), & \frac{1}{2}\varphi'(z) \\ x, & y, & z \\ \frac{D}{2}\Phi'(x), & \frac{D}{2}\Phi'(y), & \frac{D}{2}\Phi'(z) \end{vmatrix}$$

und bemerken, dass die Componenten in derselben auf Grund der identischen Gleichungen (20) folgende Werthe haben:

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x) = a\lambda_0 X + a'\lambda_1 Y + a''\lambda_2 Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(y) = b\lambda_0 X + b'\lambda_1 Y + b''\lambda_2 Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(z) = c\lambda_0 X + c'\lambda_1 Y + c''\lambda_2 Z,$$

$$x = aX + a'Y + a''Z,$$
$$y = bX + b'Y + b''Z,$$
$$z = cX + c'Y + c''Z,$$

$$\frac{D}{2}\Phi'(x) = a\frac{D}{\lambda_0}X + a'\frac{D}{\lambda_1}Y + a''\frac{D}{\lambda_2}Z,$$
$$\frac{D}{2}\Phi'(y) = b\frac{D}{\lambda_0}X + b'\frac{D}{\lambda_1}Y + b''\frac{D}{\lambda_2}Z,$$
$$\frac{D}{2}\Phi'(z) = c\frac{D}{\lambda_0}X + c'\frac{D}{\lambda_1}Y + c''\frac{D}{\lambda_2}Z.$$

Setzen wir diese Werthe der Componenten in die Determinante (21), so sehen wir, dass nach (31) und (29) der siebenten Vorlesung dieselbe in das Product zerfällt:

$$(22) \ldots\ldots [a] = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\lambda_0}, & \frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2} \end{vmatrix} . D . XYZ.$$

Da nun der erste Factor dieses Productes nach (19) und (20) der neunzehnten Vorlesung gleich 1 ist, das Product der beiden darauf folgenden Factoren nach (18) gleich $\mp L$, so haben wir die durch die Substitutionen (19) identische Gleichung:

$$(23) \ldots\ldots XYZ = \mp \frac{[a]}{L}.$$

Wir entwickeln nun die durch (21) definirte Determinante $[a]$, welche homogen und von der dritten Ordnung ist in Rücksicht auf die Variabeln x, y, z, indem wir setzen:

$$(24) \ldots\ldots [a] = \sum a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\, x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

und setzen diese Entwickelung in (23).

Alsdann haben wir eine Entwickelung des Productes XYZ (23) nach Potenzen und Produkten der Variabeln x, y, z. Eine zweite Entwickelung desselben Productes entnehmen wir aus (22) der neunzehnten Vorlesung:

$$(25) \ldots\ldots XYZ = \sum A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

deren Entwickelungscoefficienten an der bezeichneten Stelle vorliegen.

Da nun beide Entwickeluugen für alle Werthe der Variabeln x, y, z gelten, so müssen die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln in beiden einander gleich sein, weshalb wir haben:

$$(26) \ldots\ldots\ldots A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = \mp \frac{a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{L},$$

ein System von Formeln, auf welches Jacobi zuerst aufmerksam gemacht hat.

Setzen wir diese Werthe von $A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ in die Gleichung (26) der neunzehnten Vorlesung ein, so erhalten wir die Kummer'sche Zerlegung des Ausdruckes L^2 in die Summe von nur sieben Quadraten:

$$(27) \ldots\ldots \begin{aligned} L^2 = {} & 15\left\{a_{200}^2 + a_{020}^2 + a_{002}^2\right\} + a_{111}^2 \\ & + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2. \end{aligned}$$

Eine andere Zerlegung des Ausdruckes L^2 in die Summe von zehn Quadraten würde aus der Gleichung (24) der genannten Vorlesung hervorgehen.

Es bleibt noch übrig die zehn Entwickelungscoefficienten $a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ selbst zu berechnen. Dazu ist die Kenntniss des Productes von D und der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ erforderlich. Setzen wir daher:

$$(28)\ D\Phi(x, y, z) = b_{00}x^2 + b_{11}y^2 + b_{22}z^2 + 2b_{12}yz + 2b_{20}zx + 2b_{01}xy,$$

so ergeben sich nach dem bekannten Bildungsgesetz der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ aus der gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ die Werthe:

$$(29) \ldots\ldots \begin{aligned} b_{00} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & b_{12} &= a_{01}a_{02} - a_{00}a_{12}, \\ b_{11} &= a_{22}a_{00} - a_{20}^2, & b_{20} &= a_{12}a_{10} - a_{11}a_{20}, \\ b_{22} &= a_{00}a_{11} - a_{01}^2, & b_{01} &= a_{20}a_{21} - a_{22}a_{01}. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner die Werthe der partiellen Differentialquotienten der gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ und ihrer reciproken Functionen $\Phi(x, y, z)$ in (21), und entwickeln nach Vorschrift von (24), so finden wir:

$$a_{300} = a_{20}b_{10} - a_{10}b_{20},$$
$$a_{030} = a_{01}b_{21} - a_{21}b_{01},$$
$$a_{003} = a_{12}b_{02} - a_{02}b_{12},$$

$$a_{120} = a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21} + a_{00}b_{21} - a_{21}b_{00} + a_{01}b_{20} - a_{20}b_{01},$$
$$(30) \ldots a_{102} = a_{12}b_{00} - a_{00}b_{12} + a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} + a_{10}b_{02} - a_{02}b_{10},$$

$$a_{012} = a_{02}b_{22} - a_{22}b_{02} + a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} + a_{12}b_{01} - a_{01}b_{12},$$
$$a_{210} = a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20} + a_{00}b_{20} - a_{20}b_{00} + a_{21}b_{10} - a_{10}b_{21},$$

$$a_{201} = a_{10}b_{00} - a_{00}b_{10} + a_{22}b_{10} - a_{10}b_{22} + a_{01}b_{20} - a_{20}b_{01},$$
$$a_{021} = a_{01}b_{22} - a_{22}b_{01} + a_{11}b_{01} - a_{01}b_{11} + a_{02}b_{21} - a_{21}b_{02},$$

$$a_{111} = a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} + a_{00}b_{22} - a_{22}b_{00} + a_{11}b_{00} - a_{00}b_{11}.$$

Der Ausdruck (27) für L^2 kann, unter der Voraussetzung der Realität der Coefficienten in der gegebenen Function (2) $\varphi(x, y, z)$, nicht verschwinden, wenn nicht jedes einzelne Quadrat, aus welchen er zusammengesetzt ist, verschwindet. Lassen wir daher nur die beiden ersten Quadrate der Summe verschwinden, so ergeben sich daraus die beiden Gleichungen.

$$\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{20}}{a_{20}} = \frac{b_{01}}{a_{01}},$$

welche mit den zu Anfang der Vorlesung aufgestellten Bedingungsgleichungen vollkommen übereinstimmen.

Unter Vermittelung dieser beiden Gleichungen verschwinden auch die übrigen Entwickelungscoefficienten $a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$, und deshalb auch die übrigen Quadrate, aus welchen der Ausdruck (27) L^2 zusammengesetzt ist.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Schnitte von Oberflächen zweiter Ordnung und Ebenen. Kreisschnitte.

Die Schnittcurve einer Ebene und einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ist ein Kegelschnitt, weil nach den Auseinandersetzungen in der sechszehnten Vorlesung durch die Schnittcurve eines Ebenenpaares und der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sich immer ein Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen lässt. Sie ist überdies eine Curve zweiter Ordnung. Denn transformirt man die Gleichung der gegebenen Oberfläche auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen eine Coordinatenebene mit der, die Oberfläche schneidenden, Ebene zusammenfällt, so ändert sich der Grad der Gleichung nicht. Es ändert sich auch der Grad der Gleichung nicht, wenn man die, auf der schneidenden Ebene senkrecht stehende, variable Coordinate in der Gleichung der Oberfläche gleich 0 setzt, wodurch man eben die Gleichung der Schnittcurve erhält.

Die reciproke Polare derjenigen geraden Linie, welche auf der Schnittebene im Unendlichen liegt, schneidet die Schnittebene in dem Mittelpunkte der Schnittcurve. Denn alle Sehnen der Oberfläche, welche durch den Schnittpunkt und die genannte gerade Linie im Unendlichen gehen, werden durch ihn halbirt. Es macht demnach keine Schwierigkeit den Mittelpunkt eines ebenen Schnittes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, oder, der Construction folgend, die Coordinaten desselben analytisch zu bestimmen. Wir ziehen es jedoch vor, das Problem des Mittelpunktes eines ebenen Schnittes auf einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung rein algebraisch aufzufassen.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $\varphi(x, y, z)$ und $f(x, y, z, 1)$ die Ausdrücke:

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$

$$(2) \quad f(x, y, z, 1) = \varphi(x, y, z) + 2a_{30}x + 2a_{31}y + 2a_{32}z + a_{33},$$

und nehmen an, dass die Gleichung der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung und der sie schneidenden Ebene seien:

(3) . . . . $f(x, y, z, 1) = o$,

(4) . . . . $ax + by + cz + d = o$.

Das Problem des Mittelpunktes der Schnittcurve der Oberfläche und der Ebene lässt sich dann algebraisch so fassen:

Die Substitutionen:

(5) . . . . $x = X + A,\quad y = Y + B,\quad z = Z + C$

zu bestimmen, welche die Gleichungen:

(6) $f(x, y, z, 1) = \varphi(X, Y, Z) - 2\mu(aX + bY + cZ) + f(A, B, C, 1)$,

(7) . . . . $ax + by + cz + d = aX + bY + cZ$

zu identischen Gleichungen machen.

Das Problem verlangt die Bestimmung von vier Grössen μ, A, B, C. Diese vier Grössen sind so zu bestimmen, dass sie den vierzehn Bedingungsgleichungen genügen, welche man erhält, wenn man (5) in die Gleichungen (6) und (7) substituirt und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich setzt. Man bemerkt aber sogleich, dass die sieben, von den Gliedern der zweiten und oten Ordnung in (6) herrührenden, Bedingungsgleichungen identische Gleichungen sind, dass ebenso die drei, von den Gliedern der ersten Ordnung in (7) herrührenden, Bedingungsgleichungen identische Gleichungen sind. Es bleiben also in der That nur vier Gleichungen zur Bestimmung der genannten vier Grössen übrig, und das Problem ist ein ganz bestimmtes.

Die in dem Problem zu bestimmenden Grössen A, B, C sind die Coordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Kegelschnittes. Denn macht man in den genannten Gleichungen die Substitutionen (5), wodurch mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen nur der Coordinatenanfangspunkt geändert wird, so gehen die Gleichungen (3) und (4) des Kegelschnittes über in:

(8) . . . $\varphi(X, Y, Z) - 2\mu(aX + bY + cZ) + f(A, B, C, 1) = o$,

(9) . . . . $aX + bY + cZ = o$.

Sind nun X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Punktes auf diesem Kegelschnitte, welche den beiden Gleichungen genügen müssen, so genügen auch die Coordinaten $-X$, $-Y$, $-Z$ denselben beiden Gleichungen. Das heisst jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Sehne des Kegelschnittes wird durch ihn halbirt. Da aber A, B, C die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in dem ursprünglichen Coordinatensystem sind, so sind dieselben zugleich die Coordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Kegelschnittes in dem ursprünglichen Coordinatensysteme.

Macht man in (6) und (7) die Substitutionen (5) und setzt die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der genannten Gleichungen einander gleich, so erhält man mit Uebergehung der zehn identischen Gleichungen folgende vier lineare Gleichungen zur Bestimmung von μ und der Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes des Kegelschnittes:

$$(10) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'(A) + \mu a &= o, \\ \tfrac{1}{2}f'(B) + \mu b &= o, \\ \tfrac{1}{2}f'(C) + \mu c &= o, \\ aA + bB + cC + d &= o. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen, dass man das vorgelegte Problem auch als eine Maximums- oder Minimums-Aufgabe behandeln kann: **Die Werthe der Variabeln in der gegebenen Function $f(x, y, z, 1)$ so zu bestimmen, dass die Function ein Maximum oder Minimum werde, wenn zwischen den Variabeln die Bedingungsgleichung $ax + by + cz + d = o$ gegeben ist.** Denn diese Aufgabe führt wieder auf die Gleichungen (10) zurück.

Es fällt ferner in die Augen, dass in die, den Mittelpunkt des Kegelschnittes bestimmenden, Gleichungen das ganz constante Glied a_{33} in der Gleichung der gegebenen Oberfläche nicht eingeht. Diese Bemerkung beweiset den Satz:

Eine beliebig gegebene Ebene schneidet das ganze System Oberflächen zweiter Ordnung, die denselben Asymptotenkegel haben, in Kegelschnitten, welche denselben Mittelpunkt haben.

Dieser Satz gilt auch von den Ellipsoiden mit demselben Mittelpunkte und derselben Richtung ihrer Hauptaxen, wenn die Verhältnisse der letzteren constant sind. Denn unter diesen Bedingungen haben sie denselben imaginären Asymptotenkegel.

Betrachtet man in der vierten Gleichung (10) d als variabel und eliminirt man aus den übrigen Gleichungen (10) die Unbekannte μ, so erhält man die Gleichungen:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f'(A)}{a} = \frac{f'(B)}{b} = \frac{f'(C)}{c}$$

der geraden Linie, in welcher die Mittelpunkte der mit (4) parallelen Schnitte liegen. Es ist dieses die reciproke Polare der geraden Linie, welche in der Ebene des Schnittes im Unendlichen liegt. Deshalb ist sie auch der geometrische Ort der Pole der parallelen Schnittebenen.

Die Lage der, die gegebene Oberfläche schneidenden, Ebene war bisher beliebig. Wir wollen jetzt dieselbe so bestimmen, dass der Mittelpunkt auf der Schnittcurve selbst liegt, dass also die Schnittcurve ein Linienpaar wird.

Die Bedingung, dass dieses zutreffe, drückt neben den Gleichungen (10) die noch hinzukommende Gleichung aus:

$$f(A, B, C, 1) = o.$$

Um diese Gleichung des zweiten Grades mit Hülfe der Gleichungen (10) auf eine lineare Gleichung zurückzuführen, multipliciren wir die Gleichungen (10) der Reihe nach mit $A, B, C, -\mu$ und addiren, wodurch wir erhalten:

$$\tfrac{1}{2}\left\{Af'(A) + Bf'(B) + Cf'(C)\right\} - \mu d = o.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der zuletzt angegebenen Bedingungsgleichung ab, so können wir dieselbe also ausdrücken:

$$(12) \ldots\ldots \quad a_{30}A + a_{31}B + a_{32}C + a_{33} + \mu d = o.$$

Reihen wir endlich diese Bedingungsgleichung als die vorletzte in dem Systeme Gleichungen (10) ein, und setzen, um sämmtliche Gleichungen homogen zu machen, $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ respective für A, B, C und $\mu D = \nu$, so haben wir folgendes System von fünf homogenen Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{aligned} a_{00}A + a_{01}B + a_{02}C + a_{03}D + av &= o, \\ a_{10}A + a_{11}B + a_{12}C + a_{13}D + bv &= o, \\ a_{20}A + a_{21}B + a_{22}C + a_{23}D + cv &= o, \\ a_{30}A + a_{31}B + a_{32}C + a_{33}D + dv &= o, \\ aA + bB + cC + dD \qquad &= o, \end{aligned}$$

welchem genügt werden muss, wenn die Schnittcurve der Oberfläche ein Linienpaar sein soll.

Die Elimination der fünf Unbekannten A, B, C, D, v aus diesen Gleichungen giebt:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & c \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & d \\ a, & b, & c, & d, & o \end{vmatrix} = o,$$

die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der Gleichung (4) der, die gegebene Oberfläche (3) in geraden Linien schneidenden, Ebenen. Diese Bedingungsgleichung drückt nach (18) und (13) der zehnten Vorlesung analytisch den Satz aus:

Die Ebenen, welche eine Oberfläche zweiter Ordnung in geraden Linien schneiden, sind Tangentenebenen der Oberfläche, und jede Tangentenebene einer Oberfläche zweiter Ordnung schneidet die Oberfläche in geraden Linien.

Von den fünf Gleichungen (13) drückt die vierte die Bedingung aus, dass der, durch die vier anderen bestimmte, Mittelpunkt der Schnittcurve auf dieser Curve selbst liege. Wir werden die genannte Bedingung wieder aufheben, indem wir von der vierten Gleichung absehen und an ihre Stelle die Bedingung $D = o$ substituiren, dass der Mittelpunkt der ebenen Schnittcurve in das Unendliche falle, dass also die Schnittcurve eine Parabel werde. Dadurch erhalten wir aus (13) mit Weglassung der vierten Gleichung:

$$(15) \quad \begin{aligned} a_{00}A + a_{01}B + a_{02}C + a\nu &= o, \\ a_{10}A + a_{11}B + a_{12}C + b\nu &= o, \\ a_{20}A + a_{21}B + a_{22}C + c\nu &= o, \\ aA + bB + cC &= o, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von A, B, C, ν hervorgeht:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & c \\ a, & b, & c, & o \end{vmatrix} = o,$$

die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten a, b, c, d der, die gegebene Oberfläche (3) schneidenden, Ebene (4) zu erfüllen haben, wenn die Schnittcurve eine Parabel sein soll.

Die Bemerkung, dass in diese Bedingungsgleichung die letzte Coordinate d der Ebene gar nicht eingeht, drückt geometrisch den Satz aus, dass parallele Ebenen eine Oberfläche zweiter Ordnung in Parabeln schneiden, wenn eine derselben die Oberfläche in einer Parabel schneidet. Setzen wir daher $d = o$, um nur die Schnittebenen zu betrachten, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, so drückt die Gleichung (16) analytisch einen Kegel zweiter Ordnung aus, der von der Schnittebene berührt wird.

Um die Bedeutung dieses Kegels für die gegebene Oberfläche zu ermitteln, drücken wir den, dem Asymptotenkegel der Oberfläche parallelen, Kegel, dessen Spitze in dem Coordinatenanfangspunkte liegt, in Punktcoordinaten durch die Gleichung aus:

$$\varphi(x, y, z) = o.$$

Die reciproke Function $\Phi(a, b, c)$ von $\varphi(x, y, z)$ kann man darstellen wie folgt:

$$\Phi(a, b, c) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & c \\ a, & b, & c, & o \end{vmatrix}.$$

Deshalb ist, unter der Voraussetzung, dass $d = o$, die Gleichung:

$$\Phi(a, b, c) = o,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung (16) die Gleichung des in Rede stehenden Kegels, ausgedrückt durch Ebenencoordinaten. Man hat daher den Satz:

Alle Ebenen, welche parallel sind den Tangentenebenen des Asymptotenkegels einer Oberfläche zweiter Ordnung, schneiden die Oberfläche in Parabeln.

Ausser den angegebenen Parabelschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung giebt es keine.

Wir werden in dem Folgenden das Problem der Hauptaxen eines Kegelschnittes auf einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als die Frage nach den, von dem Coordinatenanfangspunkte ausgehenden, geraden Linien behandeln, welche den Hauptaxen des Kegelschnittes parallel sind, um nicht die Parabel von unserer Behandlungsweise ausschliessen zu müssen. Wir werden das vorgelegte Problem rein algebraisch auffassen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass (3) die Gleichung der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung und dass (4) die Gleichung der, die Oberfläche schneidenden, Ebene sei. Wir nehmen ferner an, dass die Gleichung (4) der Ebene in der Normalform gegeben sei, wonach a, b, c die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Normale der Ebene mit den zum Grunde gelegten Coordinatenaxen bildet, zwischen welchen Cosinus die Relation besteht:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dieses vorausgesetzt kommt das vorgelegte Problem der Hauptaxen des Kegelschnittes auf der gegebenen Oberfläche darauf hinaus:

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$(18)\qquad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen:

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$(20) \quad \ldots \quad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ$$

zu identischen Gleichungen machen unter der Voraussetzung, dass a, b, c gegebene Grössen seien, zwischen welchen die Gleichung besteht $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

Die Substitutionen (18) sind nämlich, weil sie die Gleichung (19) zu einer identischen machen, die Transformationsformeln für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte. Die YZEbene des neuen Coordinatensystemes ist parallel der, die Oberfläche schneidenden, Ebene, weil man durch Auflösung der Substitutionen (18) den Werth von X erhält: $X = ax + by + cz$. Deshalb stellt sich die Gleichung der Ebene (4) in dem neuen Coordinatensystem so dar:

$$X + d = o.$$

Die Gleichung (20) dient zur Transformation der Gleichung (3) der gegebenen Oberfläche auf das neue Coordinatensystem und lässt erkennen, dass in der transformirten Gleichung (3) das mit YZ multiplicirte Glied ganz fehlt. Setzt man daher in der transformirten Gleichung (3) $-d$ für X, um die Gleichung des Schnittes der Oberfläche in der senkrechten Projection auf die YZEbene zu erhalten, so fehlt auch in dieser Gleichung das mit YZ multiplicirte Glied, welches eben der Beweis ist, dass die YAxe und die ZAxe des neuen Coordinatensystems den Hauptaxen der Schnittcurve parallel gehen.

Das vorgelegte Problem verlangt die Bestimmung von elf Grössen, nämlich der sechs nicht gegebenen Coefficienten in den Substitutionen (18) und der fünf Coefficienten λ_0, λ_1, λ_2, μ', μ'' in der Gleichung (20). Die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen ist 12. Man erhält dieselben, wenn man in (19) und (20) die

Substitutionen (18) macht und die Coefficienten der Potenzen und Producte gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich setzt. Da von diesen zwölf Bedingungsgleichungen jedoch eine, nämlich die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, der Voraussetzung nach schon erfüllt ist, so hat man gerade so viele Bedingungsgleichungen als Unbekannte.

Nachdem wir uns auf diese Weise von der Lösbarkeit des Problemes überzeugt haben, gehen wir an die Bestimmung der genannten elf Unbekannten.

Wir setzen zu diesem Zwecke $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, und erhalten aus (20) mit Rücksicht auf (18) den Werth der ersten Unbekannten:

$$\lambda_0 = \varphi(a, b, c). \tag{21}$$

Um die übrigen zehn Unbekannten zu bestimmen, werden wir die Gleichungen benutzen:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \tag{22}$$

welche aus der Gleichung (19) durch Differentiation nach den Variabeln X, Y, Z hervorgehen, und überdies noch die 6 Gleichungen, welche die identische Gleichung (19) bedingen:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Durch Differentiation der durch die Substitutionen (18) identischen Gleichung (20) nach der Variabeln Y erhalten wir:

$$a'\varphi'(x) + b'\varphi'(y) + c'\varphi'(z) = 2\lambda_1 Y - 2\mu' X$$

oder:

$$x\varphi'(a') + y\varphi'(b') + z\varphi'(c') = 2\lambda_1 Y - 2\mu' X.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für Y und X die Werthe aus (22), und vergleichen hierauf beide Seiten der Gleichung mit einander, so ergiebt sich daraus das System Gleichungen:

$$(24) \quad \begin{aligned} \varphi'(a') &= 2\lambda_1 a' - 2a\mu', \\ \varphi'(b') &= 2\lambda_1 b' - 2b\mu', \\ \varphi'(c') &= 2\lambda_1 c' - 2c\mu'. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir ein zweites System Gleichungen durch Differentiation der Gleichung (20) nach Z:

$$(25) \quad \begin{aligned} \varphi'(a'') &= 2\lambda_2 a'' - 2a\mu'', \\ \varphi'(b'') &= 2\lambda_2 b'' - 2b\mu'', \\ \varphi'(c'') &= 2\lambda_2 c'' - 2c\mu''. \end{aligned}$$

Wir schliessen ferner dem System Gleichungen (24) die letzte Gleichung (23) und dem Systeme Gleichungen (25) die vorletzte Gleichung (23) an, wodurch wir zwei ganz analog gebildete Systeme Gleichungen erhalten, von welchen wir nur das eine System weiter zu behandeln brauchen.

Das erste von diesen Systemen Gleichungen lässt sich also darstellen:

$$(26) \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda_1)a' + a_{01}b' + a_{02}c' + a\mu' &= o, \\ a_{10}a' + (a_{11} - \lambda_1)b' + a_{12}c' + b\mu' &= o, \\ a_{20}a' + a_{21}b' + (a_{22} - \lambda_1)c' + c\mu' &= o, \\ aa' + bb' + cc' &= o. \end{aligned}$$

Es ist linear und homogen in Rücksicht auf die vier Unbekannten a', b', c', μ'. Eliminirt man diese vier Unbekannten, und setzt λ für λ_1, so erhält man die Gleichung:

$$(27) \quad \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01}, & a_{02}, & a \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda, & a_{12}, & b \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \lambda, & c \\ a, & b, & c, & o \end{vmatrix} = o.$$

Diese Gleichung ist quadratisch in λ. Ihre Wurzeln sind die gesuchten Unbekannten λ_1 und λ_2.

Wenn man diese Gleichung nach Potenzen und Producten der gegebenen Grössen a, b, c entwickelt, so wird man bemerken, dass die Coefficienten derselben negativ genommen gerade die 6 in der zwanzigsten Vorlesung unter (12) aufgeführten Ausdrücke

sind. Adoptirt man daher hier die dort gebrauchte Bezeichnung, so stellt sich die Gleichung (27) auch so dar:

$$(28)\quad \Delta_{00}a^2 + \Delta_{11}b^2 + \Delta_{22}c^2 + 2\Delta_{12}bc + 2\Delta_{20}ca + 2\Delta_{01}ab = o.$$

Von dieser quadratischen Gleichung (27) oder (28) hängen die Hauptaxen des ebenen Schnittes der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung ab. Durch die Wurzeln derselben, die man festzustellen hat, lassen sich die noch übrigen Unbekannten des Problemes wie folgt ausdrücken.

Setzt man, um von den Bezeichnungen (12) der zwanzigsten Vorlesung Gebrauch zu machen, in den drei ersten Gleichungen (26) λ für λ_1, indem man unter λ die Wurzel λ_1 versteht und löset die genannten drei Gleichungen nach a', b', c' auf, so erhält man folgende Werthe derselben, ausgedrückt durch die einzige Unbekannte μ':

$$(29)\quad \begin{aligned} a' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{00}a + \Delta_{10}b + \Delta_{20}c),\\ b' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{01}a + \Delta_{11}b + \Delta_{21}c),\\ c' &= -\frac{\mu'}{\Delta}(\Delta_{02}a + \Delta_{12}b + \Delta_{22}c). \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen für λ die andere Wurzel λ_2, so hat man a', b', c', μ' respective zu verändern in a'', b'', c'', μ''.

Es bleibt noch übrig die Werthe von μ' und μ'' festzustellen. Dazu dienen die Gleichungen:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

Denn setzt man in die erste von diesen Gleichungen die Werthe (29) ein, und in die zweite die aus ihnen durch Veränderung der ersten Wurzel λ_1 in die zweite λ_2 hervorgegangenen Werthe, so bestimmt die erste Gleichung den Werth von μ', die andere den Werth von μ''.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung, von welchen die Hauptaxen eines ebenen Schnittes einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung abhängen, sind reell.

Denn wären sie imaginär, so könnten sie nur die Form haben $\lambda_1 = p + qi$ und $\lambda_2 = p - qi$. Von derselben Form würden aber auch die in dem Vorhergehenden festgestellten Werthe der Substitutionscoefficienten a' und a'', ebenso b' und b'', wie c' und c'' sein. In dieser Form könnten sie jedoch nicht der vierten Gleichung (23) genügen:

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = o.$$

Es ist wichtig zu wissen, dass durch reelle Coordinatentransformation die Gleichung der senkrechten Projection der Schnittcurve auf die YZEbene sich auf die oben angedeutete Form zurückführen lässt, in welcher die Summe der Glieder zweiter Ordnung ist:

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2.$$

Von ihnen hängt nämlich die Natur der Curve ab. Sie ist eine Ellipse, wenn die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung (27) gleiche Vorzeichen haben. Sie ist eine Hyperbel, wenn die Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Sie ist endlich eine Parabel, wenn eine der beiden Wurzeln verschwindet.

Die quadratische Gleichung (27) dient daher zur Unterscheidung der drei Arten von ebenen Schnittcurven der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurve ist eine Ellipse, wenn die nach Potenzen von λ geordnete Gleichung (27) aus Gliedern besteht von gleichen Vorzeichen oder aus Gliedern von abwechselnden Vorzeichen. Im entgegengesetzten Falle ist die Schnittcurve eine Hyperbel. Die Bedingung für Parabelschnitte erhalten wir, da für sie eine Wurzel der quadratischen Gleichung (27) verschwindet, wenn wir in jener Gleichung λ gleich o setzen, wodurch wir wieder auf die Bedingungsgleichung (16) zurückkommen.

Die quadratische Gleichung (27) ist unabhängig von der Entfernung $-d$ der, die gegebene Oberfläche schneidenden, Ebene vom Coordinatenaufangspunkte. Es bleiben daher für alle parallelen Schnittebenen die beiden Glieder der zweiten Ordnung (30) ungeändert. Auch die Substitutionscoefficienten sind unabhängig von der genannten Entfernung $-d$, wie aus ihren Werthen (29) zu ersehen ist. Diese Bemerkungen geometrisch gefasst geben den Satz:

Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten.

Wir verstehen nämlich unter ähnlichen Kegelschnitten solche, deren Hauptaxen dasselbe Verhältniss haben, und unter ähnlich liegenden Kegelschnitten solche, deren Hauptaxen parallele Richtungen haben.

Die Grenze zwischen den Ellipsenschnitten und Hyperbelschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung bilden die Parabelschnitte, welche den Tangentenebenen des Asymptotenkegels der Oberfläche parallel sind. Kann diese Grenze nicht erreicht werden, das ist, wenn der Asymptotenkegel imaginär ist, so hat die Oberfläche nur Schnitte derselben Art. Da der Asymptotenkegel des Ellipsoides imaginär ist, so wird das Ellipsoid von allen Ebenen nur in Ellipsen geschnitten.

Das durchgeführte algebraische Problem lässt sich auch als eine Maximums- oder Minimums-Aufgabe ausdrücken wie folgt:

Die Werthe der Variabeln in der gegebenen homogenen Function zweiter Ordnung $\varphi(x, y, z)$ so zu bestimmen, dass der Werth dieser Function ein Maximum oder Minimum werde, wenn die Variabeln den beiden Bedingungsgleichungen $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = o$, $ax + by + cz = o$ genügen.

Denn stellt man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung die Gleichungen auf, welche das Problem lösen, so findet man gerade die Gleichungen (26) und die Gleichung $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, wenn man mit a', b', c' die Werthe der Variabeln bezeichnet, welche die gegebene Function zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die Schnittcurve der Ebene (4) und der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung (3) wird ein Kreis, wenn die Coefficienten λ_1, λ_2 in dem Ausdrucke (30) einander gleich sind. Man erhält daher als Bedingung für die Kreisschnitte, dass die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (27) einander gleich sind. Auch diese Bedingung ist unabhängig von dem Werthe von d in

der Gleichung der, die gegebene Oberfläche schneidenden, Ebene. Deshalb werden alle parallelen Ebenen eine gegebene Oberfläche zweiter Ordnung in Kreisen schneiden, wenn eine derselben die Oberfläche in einem Kreise schneidet, was schon aus dem vorangegangenen Satze folgt.

Um auf die Bedingung der Kreisschnitte einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung näher einzugehen, wollen wir annehmen, dass die nach Potenzen von λ geordnete quadratische Gleichung (27) sei:

$$(31) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A'\lambda^2 - B'\lambda + C' = o.$$

Die gesuchte Bedingung für den Kreisschnitt der gegebenen Oberfläche ist dann:

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B'^2 - 4A'C' = o.$$

Da die Coordinaten a, b, c der Ebene (4) nur dieser einen, in Beziehung auf sie homogenen, Gleichung des vierten Grades zu genügen brauchen, damit der Schnitt der Ebene und der gegebenen Oberfläche ein Kreis sei, so könnte man daraus schliessen, dass durch einen gegebenen Punkt unendlich viele Ebenen gehen, welche die gegebene Oberfläche in Kreisen schneiden. Allein, wie die eine Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln der quadratischen Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines Kegelschnittes in der Ebene abhängen, für den Kreis sich, unter der Voraussetzung der Realität, in zwei Bedingungen auflöset, so lässt sich auch in dem vorliegenden Falle erwarten, dass die eine Bedingung (32) zwei Bedingungen involvire, wodurch die Zahl der Kreisschnitte eine beschränktere würde.

Die Zerlegung des Ausdruckes $B'^2 - 4A'C'$ in die Summe von Quadraten nach Analogie der vorhergehenden Vorlesung ist bisher nicht versucht worden, sie gäbe aber einen schätzenswerthen Beitrag für die analytische Behandlung des Problemes der Kreisschnitte auf Oberflächen zweiter Ordnung.

Wir werden im Folgenden der Untersuchung der Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung die in der zwanzigsten Vorlesung (16), (17), (18) hervorgehobenen einfachsten Gleichungsformen der Oberflächen zweiter Ordnung zum Grunde legen:

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 - 1 = o,$$
$$(33) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \alpha x = o,$$
$$\lambda_2 z^2 + \alpha x + \beta y = o.$$

Alsdann wird die quadratische Gleichung (27):

$$(34) \quad (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)a^2 + (\lambda_2 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)b^2 + (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)c^2 = o.$$

und daher:

$$A' = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$(35) \ldots\ldots \quad B' = (\lambda_1 + \lambda_2)a^2 + (\lambda_2 + \lambda_0)b^2 + (\lambda_0 + \lambda_1)c^2,$$
$$C' = \lambda_1 \lambda_2 a^2 + \lambda_2 \lambda_0 b^2 + \lambda_0 \lambda_1 c^2.$$

Componirt man aus diesen Ausdrücken die Gleichung (32) $B'^2 - 4A'C' = o$, so erhält man die Bedingungsgleichung für die Kreisschnitte:

$$(36) \quad A^2 a^4 + B^2 b^4 + C^2 c^4 - 2BCb^2c^2 - 2CAc^2a^2 - 2ABa^2b^2 = o.$$

wenn man, um abzukürzen setzt:

$$(37) \ldots\ldots \quad A = \lambda_1 - \lambda_2, \quad B = \lambda_2 - \lambda_0, \quad C = \lambda_0 - \lambda_1.$$

Diese Gleichung gilt für jede der drei Gleichungsformen (33), da man nach Belieben eine oder auch zwei von den Grössen λ_0, λ_1, λ_2 gleich o setzen kann. Sie zerfällt in die Factoren:

$$(38) \ldots \quad (a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C})(-a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C}) \times (a\sqrt{A} - b\sqrt{B} + c\sqrt{C})(a\sqrt{A} + b\sqrt{B} - c\sqrt{C}) = o,$$

und kann nicht anders erfüllt werden, als wenn einer der Factoren gleich o ist. Lassen wir daher vorläufig die Vorzeichen der Quadratwurzelzeichen unentschieden, so haben wir nur die eine Bedingungsgleichung:

$$(39) \ldots\ldots\ldots \quad a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C} = o.$$

Diese eine Gleichung zerfällt aber in zwei Bedingungsgleichungen, weil nach (37) ist:

$$A + B + C = o,$$

und daher immer eine von den drei Grössen A, B, C das entgegengesetzte Vorzeichen von den beiden anderen hat, wodurch eben das Imaginäre in die Gleichung (39) hineinkommt. Nehmen wir nun an, dass A und C von gleichem Vorzeichen seien, gleichviel,

ob eine von den drei Grössen λ_0, λ_1, λ_2 gleich o ist, so zerfällt die Gleichung (39) in die beiden Gleichungen:

$$a\sqrt{A} + c\sqrt{C} = o, \quad b\sqrt{B} = o,$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Quadratwurzelgrössen die Bedingungsgleichungen für die Kreisschnitte ergeben:

$$(40) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{a}{c} = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}, \qquad b = o.$$

Sie beweisen, dass die Ebenen der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung parallel gehen der mittleren Hauptaxe der Oberfläche und dass sie mit jeder der beiden anderen Hauptaxen bestimmte gleiche Winkel bilden.

Die Bedingung, dass beide Richtungen der Kreisschnitte in eine zusammenfallen, ist entweder $C = o$ oder $A = o$, welches gerade die Bedingungen für eine Rotationsoberfläche zweiter Ordnung sind. Es fallen daher die beiden Richtungen der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung nur dann in eine Richtung zusammen, wenn die Oberfläche eine Rotationsoberfläche ist.

Nehmen wir, um auch den dritten Fall (33) zu berücksichtigen, an, das $\lambda_0 = \lambda_1 = o$, so zerfällt die Gleichung (39) in die beiden Gleichungen:

$$a = o, \quad b = o,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Ebenen der Kreisschnitte senkrecht stehen auf der z Axe der Oberfläche. Eine jede auf der z Axe senkrecht stehende Ebene schneidet aber diese Oberfläche in einer geraden Linie. Diese Thatsache widerstreitet jedoch unseren Ansichten nicht, wonach wir eine gerade Linie auch als Kreis betrachten mit unendlich grossem Radius.

Wir werden das Problem der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung einer zweiten von dem Vorhergehenden unabhängigen Behandlung unterwerfen, welche in grösserer Allgemeinheit die Abhängigkeit desselben von dem Problem der Hauptaxen der Oberfläche an den Tag legen wird.

Es sei $f(x, y, z, 1) = o$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung. Hat diese Oberfläche einen Kreisschnitt, so kann man durch denselben eine Kugel $K = o$ hindurchlegen, welche die Oberfläche noch in einem zweiten Kreise schneiden muss. Denn da die beiden Oberflächen sich in einer, in einer Ebene liegenden, Curve, dem Kreise, schneiden, so schneiden sie sich nach den Auseinandersetzungen in der neunten Vorlesung noch in einer zweiten, in einer Ebene liegenden, Curve und, da diese Curve auf der Kugel liegt, in einem zweiten Kreise.

Die beiden Kreise liegen in einem Ebenenpaar $A A_1 = o$, welches durch den Schnitt der gegebenen Oberfläche und der Kugel hindurchgeht. Man wird daher auf Grund der neunten Vorlesung zwei Factoren λ und μ der Gestalt bestimmen können, dass man identisch hat:

$$(41) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z, 1) - \lambda K = \mu A A_1 .$$

Umgekehrt, wenn sich die in diese Gleichung eingehenden unbestimmten Constanten so bestimmen lassen, dass die Gleichung eine identische wird, so wird das als Beweis dienen, dass die gegebene Oberfläche Kreisschnitte habe, und dass diese Kreisschnitte in dem Ebenenpaare $A A_1 = o$ liegen.

Der Ausdruck:

$$(42) \quad \ldots \quad K = (x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 - R^2$$

enthält die zu bestimmenden Coordinaten A, B, C des Mittelpunktes der Kugel $K = o$ und den zu bestimmenden Radius R, also vier zu bestimmende Constanten. Das Product $\mu A A_1$ enthält 7 zu bestimmende Constanten. Die identische Gleichung (41) enthält daher, da noch die Constante λ hinzukommt, im Ganzen 12 zu bestimmende Constanten. Sie löset sich aber nur in zehn Bedingungsgleichungen auf, welche die zwölf Constanten nicht vollständig bestimmen können. Man kann daher auf mehrfache Art die zwölf Constanten so bestimmen, dass sie der Gleichung (41) identisch genügen; weshalb die gegebene Oberfläche Kreisschnitte haben wird.

Um das Problem der Kreisschnitte einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung als ein bestimmtes algebraisches Problem auszudrücken, wollen wir annehmen, dass die ganz constanten Glieder in A und A_1 gleich o seien, was darauf hinauskommt,

die Ebenen der Kreisschnitte durch den Coordinatenanfangspunkt gehen zu lassen. Dadurch wird das Problem ein ganz bestimmtes. Denn wir haben die 4 von der Kugel herrührenden Constanten, die 5 in $\mu A A_1$ steckenden Constanten und die Constante λ, also gerade so viel zu bestimmende Constanten als Gleichungen.

Die vier Constanten der Kugel gehen nur in die vier Glieder der ersten und 0ten Ordnung auf der linken Seite der Gleichung (41) ein. Diese vier Constanten reichen daher aus, um die vier Glieder verschwinden zu machen, da sie den entsprechenden Gliedern des rechten Theiles der Gleichung, welche eben verschwinden, gleich sein sollen. Da nun das Problem der Kreisschnitte weder den Mittelpunkt noch den Radius der erwähnten Kugel verlangt, so können wir von den Gliedern der ersten und oten Ordnung in der identischen Gleichung (41) absehen, und, indem wir nur die Glieder zweiter Ordnung im Auge behalten, auf Grund von (2) und (42) das Problem der Kreisschnitte einer gegebenen Oberfläche $f(x, y, z, 1) = o$ als ein ganz bestimmtes algebraisches Problem also ausdrücken:

Die Constante λ und die fünf in dem Product $\mu A A_1$ steckenden Constanten der Art zu bestimmen, dass folgende Gleichung:

$$(43) \quad \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = \mu A A_1$$

eine identische Gleichung wird.

Denn $A A_1 = o$ ist dann die Gleichung des durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Ebenenpaares, welches die gegebene Oberfläche in Kreisen schneidet.

Um dieses algebraische Problem zu lösen, differenziren wir die identische Gleichung (43) nach den Variabeln, wodurch wir die ebenfalls identischen Gleichungen erhalten:

$$(44) \quad \begin{aligned} \varphi'(x) - 2\lambda x &= \mu A \frac{dA_1}{dx} + \mu A_1 \frac{dA}{dx}, \\ \varphi'(y) - 2\lambda y &= \mu A \frac{dA_1}{dy} + \mu A_1 \frac{dA}{dy}, \\ \varphi'(z) - 2\lambda z &= \mu A \frac{dA_1}{dz} + \mu A_1 \frac{dA}{dz}. \end{aligned}$$

Wir setzen in diesen Gleichungen für die Variabeln x, y, z die Werthe a, b, c derselben, welche den Gleichungen:

$$A = o, \quad A_1 = o$$

zugleich genügen, also die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Schnittlinie der Ebenen $A = o$ und $A_1 = o$, wodurch wir erhalten:

$$(45) \ldots \ldots \begin{aligned} \varphi'(a) - 2\lambda a &= o, \\ \varphi'(b) - 2\lambda b &= o, \\ \varphi'(c) - 2\lambda c &= o. \end{aligned}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen, welche wir in (7) der zwanzigsten Vorlesung zur Bestimmung der Richtung der Hauptaxen aufgestellt haben. Aus ihnen geht durch Elimination von a, b, c die in Rücksicht auf λ kubische Gleichung $\varDelta = o$ hervor, deren Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ die Gleichung (43) zu einer identischen machen. Es entspricht daher einer jeden von diesen Wurzeln ein Ebenenpaar $\mu A A_1 = o$, welches einer der drei Hauptaxen der Oberfläche parallel ist und die Oberfläche in Kreisen schneidet.

Statt eines Ebenenpaares wie vorhin haben wir jetzt drei Ebenenpaare für die Kreisschnitte der gegebenen Oberfläche, deren Gleichungen wir erhalten, wenn wir in der Gleichung:

$$(46) \ldots \ldots \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = o$$

für λ nach einander die drei Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ der kubischen Gleichung $\varDelta = o$ setzen.

Von diesen drei Ebenenpaaren ist jedoch nur dasjenige reell, welches der mittleren Wurzel entspricht. Denn transformiren wir die beiden Glieder, woraus der linke Theil der angegebenen Gleichung zusammengesetzt ist, durch die Substitutionen (1) der zwanzigsten Vorlesung in (2) und (3) derselben Vorlesung, so stellt sich die Gleichung also dar:

$$(47) \ldots (\lambda_0 - \lambda)X^2 + (\lambda_1 - \lambda)Y^2 + (\lambda_2 - \lambda)Z^2 = o,$$

deren linker Theil nur für den Werth von λ gleich der mittleren Wurzel $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ gleich ist der Differenz zweier Quadrate, während derselbe für die beiden anderen Wurzeln gleich ist der Summe zweier Quadrate. Deshalb ist das Ebenenpaar (46) im ersten Falle reell, im anderen Falle imaginär.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen.

Für eine in rechtwinkligen Coordinaten x, y gegebene Gleichung irgend einer ebenen Curve:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = o$$

werden wir zur Erhaltung der Symmetrie in der folgenden Untersuchung der Krümmungsradien mit Einführung einer neuen unabhängigen Variabeln t zwei Gleichungen substituiren:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

der Art, dass, wenn man die Werthe von x und y aus (2) in (1) setzt, man eine in t identische Gleichung erhält.

Die Function $f(t)$ soll eine beliebig gewählte, aber nach der Wahl ein für alle Mal bestimmte Function von t sein. Die Function $\varphi(t)$ erhält man dann, wenn man den Werth von $x = f(t)$ in die Gleichung $u = o$ setzt, und dieselbe nach y auflöset.

In dieser Voraussetzung erhält man aus (2) die Coordinaten x, y aller Punkte der gegebenen Curve (1), wenn man der unabhängigen Variabeln t alle möglichen Werthe zuertheilt. Man erhält die Gleichung (1) der Curve selbst, wenn man t aus den beiden Gleichungen (2) eliminirt. Diese Gleichung (1) wird eine in t identische Gleichung, wenn man sich die Werthe von x und y aus (2) in dieselbe substituirt denkt. In dieser letztern Hypothese kann man daher die Gleichung (1) so oft nach t differenziren, als man will, und erhält dadurch immer wieder in Rücksicht auf t identische Gleichungen.

Differenzirt man die gegebene, in t identische, Gleichung ein oder zwei Mal nach t, so dient die gegebene Gleichung als Definition von y, die erste Differentialgleichung dient, um $\frac{dy}{dt} = y'$, und die zweite Differentialgleichung, um $\frac{d^2y}{dt^2} = y''$ zu bestimmen.

Betrachten wir nun irgend einen Punkt p der gegebenen Curve (1) mit den Coordinaten:

$$p) \ldots \ldots x, \quad y,$$

wie sie durch die Gleichungen (2) als Functionen des dem Punkte p entsprechenden Werthes von t gegeben sind, und setzen unter der Annahme, dass dt eine verschwindend kleine Grösse sei, $t + dt$ für t in die Gleichungen (2), so erhalten wir die Coordinaten eines zweiten dem Punkte p unendlich nahen Punktes q der Curve:

$$q) \ldots \ldots \ldots x + x'dt, \quad y + y'dt.$$

Die gerade Linie, welche beide Punkte mit einander verbindet:

$$(3) \ldots \ldots \ldots (X - x)y' - (Y - y)x' = o$$

ist die Tangente der Curve in dem Punkte p mit den variabeln Coordinaten X, Y.

Differenzirt man die Gleichung (1) nach t und setzt, um abzukürzen, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_1$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(4) \ldots \ldots \ldots \ldots u_0 x' + u_1 y' = o,$$

mittelst welcher man der Gleichung der Tangente (3) die Gestalt geben kann:

$$(5) \ldots \ldots \ldots (X - x)u_0 + (Y - y)u_1 = o.$$

Die Coordinaten x, y eines Punktes einer zweiten Curve:

$$(6) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots v = o$$

kann man wieder als Functionen einer und derselben unabhängigen Variabeln t darstellen wie folgt:

$$(7) \ldots \ldots \ldots \ldots x = f(t), \quad y = \psi(t).$$

Diese Curve geht durch den genannten Punkt p, wenn für den ihm entsprechenden Werth von t der Werth von y, in $u = o$, gleich ist dem Werthe von y in $v = o$. Sie geht überdies durch den Punkt q, wenn der Werth von y' in (4) dem Werthe von y' in der analogen Differentialgleichung:

$$(8) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots v_0 x' + v_1 y' = o$$

gleich ist. Denn die Werthe von x und x' für die beiden Curven sind nach (2) und (7) einander gleich.

Zwei Curven berühren sich in der ersten Ordnung, wenn sie beide durch zwei unendlich nahe Punkte hindurchgehen. Die Bedingungen einer solchen Berührung sind demnach, dass die Werthe von y und y' für den Berührungspunkt, aus der Gleichung der einen Curve und aus ihrer Differentialgleichung in die Gleichung der anderen Curve und ihre Differentialgleichung gesetzt, den Gleichungen genügen. Es haben daher zwei sich berührende Curven in dem Berührungspunkte dieselbe Tangente.

Betrachten wir einen dritten Punkt r der Curve $u = o$, dem zweiten q unendlich nahe, dessen Coordinaten:

$$r) \quad x + 2x'dt + x''dt^2, \quad y + 2y'dt + y''dt^2$$

aus den Coordinaten des Punktes q dadurch hervorgehen, dass man $t + dt$ setzt für t, so bemerken wir, dass zur Bestimmung derselben noch die Differentialgleichung zweiter Ordnung der gegebenen Curve $u = o$ erforderlich ist:

$$(9) \ldots\ldots \quad u_{00}x'^2 + 2u_{01}x'y' + u_{11}y'^2 + u_0x'' + u_1y'' = o,$$

in welcher durch u_{00}, u_{01}, u_{11} die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln x, y ausgedrückt sind. Soll nun die Curve $v = o$ auch durch diesen Punkt gehen, so muss auch das y'' aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(10) \ldots\ldots \quad v_{00}x'^2 + 2v_{01}x'y' + v_{11}y'^2 + v_0x'' + v_1y'' = o$$

dieser Curve dem y'' aus der vorhergehenden Differentialgleichung für den Berührungspunkt p gleich sein.

Man sagt, **zwei Curven berühren sich in der zweiten Ordnung**, wenn sie beide durch drei unendlich nahe Punkte hindurchgehen. Man erhält demnach die drei Bedingungen für eine Berührung zweier Curven in der zweiten Ordnung, wenn man aus der Gleichung der einen Curve und ihren beiden Differentialgleichungen die Werthe von y, y', y'' in die Gleichung der anderen Curve und in ihre beiden Differentialgleichungen setzt.

Ist die zweite, die erste Curve $u = o$ in der zweiten Ordnung berührende, Curve ein Kreis:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad (x - a)^2 + (x - b)^2 - r^2 = o,$$

so nennt man den Kreis **Krümmungskreis**, den durch die Coordinaten a, b bestimmten Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt und den Radius r desselben den Krümmungsradius für denjenigen Punkt der Curve $u = o$, in welchem die Berührung zweiter Ordnung statt hat.

Die Bedingungen für den Krümmungskreis sind demnach folgende drei Gleichungen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = o,$$

$$(12) \quad\ldots\ldots\ldots (x-a)x' + (y-b)y' \quad = o,$$

$$x'^2 + y'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' = o,$$

in welchen man sich für y, y', y'' die Werthe substituirt denken muss, wie sie sich aus der Gleichung der Curve (1) $u = o$ und ihren beiden Differentialgleichungen (4) und (9) ergeben. Die beiden letzten von den Gleichungen (12) bestimmen die Coordinaten a, b des Krümmungsmittelpunktes, die erste Gleichung den Krümmungsradius.

Um den Krümmungsmittelpunkt der Curve $u = o$ für einen gegebenen Punkt p derselben in anderer Weise festzustellen, bemerken wir, dass die Gleichung der Normale der Curve in dem Punkte p, das heisst der geraden Linie, welche in diesem Punkte auf der Tangente (3) senkrecht steht, ist:

$$(x-a)x' + (y-b)y' = o,$$

wenn wir mit a, b die variabeln Coordinaten der Punkte der Normale bezeichnen.

Setzen wir in dieser Gleichung $x + x'dt$, $y + y'dt$ respective für x, y, so erhalten wir die Gleichung der im Punkte q errichteten Normale der Curve $u = o$:

$$\{(x-a)x' + (y-b)y'\} + \{x'^2 + y'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y''\}dt = o.$$

und daher die Coordinaten a, b des Schnittpunktes beider Normalen aus den Gleichungen:

$$(x-a)x' + (y-b)y' = o,$$

$$x'^2 + y'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' = o.$$

Da diese Gleichungen aber gerade die beiden letzten Gleichungen (12) sind, welche dort die Coordinaten des Krümmungs-

mittelpunktes bestimmten, so sehen wir, dass zwei auf einander folgende, unendlich nahe Normalen einer Curve sich in dem Mittelpunkte des Krümmungskreises schneiden, der die Curve in den Fusspunkten der Normalen in der zweiten Ordnung berührt.

Wir werden uns dieses Satzes bedienen, um den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius eines Normalschnittes einer gegebenen Oberfläche zu bestimmen.

Es sei die in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegebene Gleichung irgend einer Oberfläche:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = o,$$

und die Coordinaten eines beliebig angenommenen Punktes p auf derselben:

$$p) \ldots\ldots\ldots \quad x,\ y,\ z.$$

Alsdann weiss man nach den Auseinandersetzungen im Anfange der dreiundzwanzigsten Vorlesung, dass die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Oberfläche in dem Punkte p mit den Coordinatenaxen bildet, sich verhalten wie die partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln x, y, z genommen, also wie:

$$u_0 : u_1 : u_2.$$

Sind nun die Coordinaten eines variabeln Punktes P auf der Normale der Oberfläche in dem Punkte p:

$$P) \ldots\ldots\ldots \quad a,\ b,\ c,$$

so hat man die Gleichungen der Normale mit dem variabeln Factor μ:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} x - a &= \mu u_0, \\ y - b &= \mu u_1, \\ z - c &= \mu u_2. \end{aligned}$$

Eine Ebene $A = o$ beliebig durch diese Normale gelegt, schneidet die gegebene Oberfläche $u = o$ in einem Normalschnitte des Punktes p auf ihr. Der Normalschnitt der Oberfläche ist daher gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = o,\ A = o.$$

Diese beiden Gleichungen ersetzen wir zur Aufrechthaltung der Symmetrie durch drei Gleichungen mit der einen unabhängigen Variabeln t:

$$(16) \ldots\ldots\ldots \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

indem wir die Function $x = f(t)$ beliebig wählen, die beiden anderen aber $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ uns, nach Substitution von $x = f(t)$ in die Gleichungen (15) gesetzt, aus ihnen berechnet vorstellen.

Dieses vorausgesetzt, sind nun die Coordinaten eines dem Punkte p unendlich nahen Punktes q auf dem Normalschnitt:

$$q) \ldots x + x'dt, \; y + y'dt, \; z + z'dt,$$

und demnach:

$$(17) \ldots\ldots (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = o$$

die Gleichung der Ebene, welche im Punkte p senkrecht steht auf der Verbindungslinie pq der beiden Punkte p und q, das ist der Normalebene des Normalschnittes im Punkte p. In ihr liegt die Normale (14) der Oberfläche, weil sie ebenfalls eine Normalebene der Oberfläche im Punkte p ist; was auch daraus erhellet, dass sich die Gleichung (17) zusammensetzen lässt aus den Gleichungen (14) der Normale, da man durch Differentiation der in t identischen Gleichung $u = o$ hat:

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u_0 x' + u_1 y' + u_2 z' = o.$$

Die Gleichung der Normalebene (17) des Normalschnittes (15) geht über in die Gleichung der Normalebene desselben Normalschnittes im Punkte q, wenn man setzt $t + dt$ für t:

$$(x+x'dt-a)(x'+x''dt)+(y+y'dt-b)(y'+y''dt)+(z+z'dt-c)(z'+z''dt)=o,$$

und wenn man entwickelt mit Vernachlässigung der zweiten Potenz von dt, in:

$$(19) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &\left\{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'\right\} \\ &+ \left\{x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z''\right\}dt = o. \end{aligned}$$

Sowohl in der Ebene (17) als in der Ebene (19) liegt der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes. Denn die beiden Ebenen schneiden die Ebene des Normalschnittes in zwei geraden Linien, welche zwei auf einander folgende unendlich nahe Normalen des Normalschnittes sind. Zieht man daher die Gleichung (17) von

der Gleichung (19) ab, so erhält man die Gleichung einer Ebene:

$$(20)\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' = o,$$

welche ebenfalls durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes geht.

Wir haben nun die Ebene (20) und die Normale (14) der Oberfläche, welche beide durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes gehen. Der Schnittpunkt beider wird der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes sein. Um ihn zu bestimmen hat man seine Coordinaten a, b, c zugleich mit dem Werthe von μ aus den vier Gleichungen (20) und (14) zu berechnen.

Substituiren wir zu diesem Zwecke (14) in (20), so erhalten wir:

$$\mu = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z''},$$

und wenn wir diesen Werth von μ substituiren in (14), so geben jene Gleichungen die Coordinaten a, b, c des Mittelpunktes der Krümmung des Normalschnittes.

Dem angegebenen Werthe von μ werden wir jedoch eine andere, leichter aufzufassende Gestalt geben mit Zuziehung der Gleichung, welche wir durch zweimalige Differentiation der in t identischen Gleichung $u = o$ erhalten. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit u_{00}, u_{01}, u_{11}, ... die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln x, y, z genommen, und, um weiter abzukürzen, mit $\varphi(x', y', z')$ den Ausdruck:

$$(21)\quad \varphi(x', y', z') = u_{00}x'^2 + u_{11}y'^2 + u_{22}z'^2 + 2u_{12}y'z' + 2u_{20}z'x' + 2u_{01}x'y',$$

so erhalten wir durch zweimalige Differentiation der Gleichung $u = o$ nach t:

$$(22)\quad \ldots\ldots \varphi(x', y', z') + u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z'' = o,$$

und daher den Werth von μ:

$$\mu = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\varphi(x', y', z')}$$

als einen Ausdruck der Coordinaten $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$ des Punktes q in dem rechtwinkligen parallelen Coordinatensystem, dessen Ursprung im Punkte p liegt. Bezeichnen wir daher mit α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente pq des

Normalschnittes im Punkte p mit den Coordinatenaxen bildet, so haben wir:

$$(23) \quad \mu = \frac{1}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Setzen wir diesen Werth von μ in (14) ein, quadriren die einzelnen Gleichungen und addiren sie, so erhalten wir das Quadrat des Krümmungsradius r des Normalschnittes und daraus:

$$(24) \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Diese Formel giebt die Krümmungsradien sämmtlicher Normalschnitte der gegebenen Oberfläche $u = o$ in dem Punkte p derselben, wenn die Tangente pq in der Tangentenebene der Oberfläche sich um den Punkt p beliebig dreht.

Um eine Vorstellung zu bekommen von dem Wachsen und Abnehmen der Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte der Oberfläche in dem Punkte p tragen wir die Quadratwurzel des Krümmungsradius als gerade Linie auf die Tangente des Normalschnittes vom Punkte p aus auf. Der Endpunkt q_1 der geraden Linie habe in dem rechtwinkligen Coordinatensystem mit dem Ursprung p die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Alsdann ist:

$$\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{r}}, \quad \beta = \frac{y_1}{\sqrt{r}}, \quad \gamma = \frac{z_1}{\sqrt{r}}.$$

Setzen wir diese Werthe von α, β, γ in die Gleichung (24), so erhalten wir:

$$(25) \quad \varphi(x_1, y_1, z_1) - \sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)} = o,$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte p, auf welcher der Punkt q_1 liegt. Da aber der Punkt q_1 überdies noch in der Tangentenebene der Oberfläche $u = o$ liegt, so hat man ferner:

$$(26) \quad u_0 x_1 + u_1 y_1 + u_2 z_1 = o,$$

die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Oberfläche (25) gehenden Ebene. Der Schnitt dieser Ebene (26) und der Oberfläche zweiter Ordnung (25), ein Kegelschnitt, ist der geometrische Ort des Punktes q_1.

Man braucht daher nur die Halbmesser dieses Kegelschnittes zu kennen, um die Krümmungsradien der Normalschnitte der

gegebenen Oberfläche $u = o$ zu bestimmen. Denn die Quadrate der Halbmesser sind eben die Längen der Krümmungsradien der Normalschnitte, für welche die Halbmesser Tangenten sind.

Diese Bemerkung kann dazu dienen, Sätze über Halbmesser eines Kegelschnittes in Sätze über Krümmungsradien der Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben zu übertragen.

So wissen wir zum Beispiel aus der fünfundzwanzigsten Vorlesung, „dass die Summe der reciproken Quadrate zweier auf einander senkrecht stehenden Halbmesser eines Kegelschnittes eine constante Grösse ist", woraus unmittelbar der Satz hervorgeht:

Die Summe der reciproken Krümmungsradien zweier auf einander in einem gegebenen Punkte einer Oberfläche senkrecht stehenden Normalschnitte ist eine constante Grösse.

Denken wir uns ferner den durch (25) und (26) gegebenen Kegelschnitt auf die Hauptaxen desselben bezogen:

$$\frac{x^2}{r_0} + \frac{y^2}{r_1} - 1 = o,$$

so bezeichnen r_0 und r_1 die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte, deren Tangenten in die Hauptaxen des Kegelschnittes fallen. Ist nun r der Krümmungsradius irgend eines anderen Normalschnittes, der mit den genannten beiden auf einander senkrecht stehenden Normalschnitten die Winkel α und β bildet, so ist der diesem Krümmungsradius entsprechende Halbmesser des Kegelschnittes gleich $\sqrt{r}$, und daher die senkrechten Projectionen des im Punkte x, y des Kegelschnittes endigenden Halbmessers auf die Hauptaxen des Kegelschnittes:

$$x = \sqrt{r} \,.\, \cos\alpha, \quad y = \sqrt{r} \,.\, \cos\beta.$$

Setzen wir aber diese Werthe von x und y in die Gleichung des Kegelschnittes, so erhalten wir die Relation von Euler zwischen den drei Krümmungsradien der Normalschnitte der Oberfläche:

$$(27) \quad \frac{\cos^2\alpha}{r_0} + \frac{\cos^2\beta}{r_1} - \frac{1}{r} = o.$$

Wir werden jetzt den Krümmungsmittelpunkt und den Krüm-

mungsradius eines schiefen aber ebenen, durch den Punkt p gehenden, Schnittes der Oberfläche $u = o$ bestimmen.

Wir können, ohne den schiefen Schnitt zu beschränken, annehmen, dass derselbe durch den vorhin bezeichneten Punkt q gehe. Denn der Normalschnitt der Oberfläche lässt sich um die Normale der Oberfläche so drehen, dass der Punkt q desselben in den schiefen Schnitt fällt. Wir bringen diese beiden Schnitte der Oberfläche mit einander in Verbindung, um den Krümmungsradius des einen durch den anderen auszudrücken.

Wenn nun $A_1 = o$ die Gleichung der, die Oberfläche $u = o$ in schiefer Richtung schneidenden, Ebene ist, so haben wir für den schiefen Schnitt die Gleichungen:

$$(28) \quad \ldots \ldots \ldots \quad u = o, \quad A_1 = o,$$

welche wir uns durch drei Gleichungen von der Form (16) mit der unabhängigen Variabeln t der Art ersetzt denken, dass durch Substitution der Werthe von x, y, z in die beiden Gleichungen (28) diesen Gleichungen identisch in t genügt wird.

Die Normalebene des Normalschnittes im Punkte p:

$$(29) \quad \ldots \quad (x - a)x' + (y - b)y' + (z - c)z' = o$$

ist zugleich die Normalebene des schiefen Schnittes in demselben Punkte, weil die gerade Linie pq gemeinschaftliche Tangente ist.

Aus der angegebenen Gleichung der Normalebene (29) des schiefen Schnittes im Punkte p erhalten wir die Gleichung der Normalebene desselben Schnittes im Punkte q, wenn wir für t setzen $t + dt$, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$(30) \quad \ldots \quad \begin{aligned} &\left\{(x - a)x' + (y - b)y' + (z - c)z'\right\} \\ &+ \left\{x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x - a)x'' + (x - b)y'' + (z - c)z''\right\} dt = o. \end{aligned}$$

Beide Normalebenen gehen durch den Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes, weil sie die Ebene des schiefen Schnittes in zwei unendlich nahen auf einander folgenden Normalen schneiden. Die Differenz beider Gleichungen;

$$(31) \quad \ldots \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x - a)x'' + (y - b)y'' + (z - c)z'' = o$$

ist daher die Gleichung einer Ebene, welche durch den Krüm-

mungsmittelpunkt des schiefen Schnittes geht. Ihr haben deshalb die Coordinaten a, b, c des Krümmungsmittelpunktes jenes Schnittes zu genügen.

Wenn wir mit A, B, C die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die im Punkte p in der Ebene des schiefen Schnittes liegende Normale dieses Schnittes mit den Coordinatenaxen bildet, so haben wir die Gleichungen der Normale:

$$(32) \quad \begin{aligned} x - a &= \varrho A, \\ y - b &= \varrho B, \\ z - c &= \varrho C. \end{aligned}$$

Da auf ihr der gesuchte Krümmungsmittelpunkt liegt, so haben wir aus den vier Gleichungen (31) und (32) die Werthe von a, b, c, ϱ, die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungsradius des schiefen Schnittes, zu berechnen.

Die Substitutionen von (32) in (31) geben den gesuchten Werth des Krümmungsradius:

$$\varrho = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{Ax'' + By'' + Cz''}.$$

Um diesen Ausdruck weiter zu transformiren, wollen wir annehmen, dass die Gleichung $A_1 = o$ der Schnittebene in der Normalform gegeben sei: $A_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = o$. Alsdann haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= o, \\ u_0 x' + u_1 y' + u_2 z' &= o, \\ \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' &= o, \end{aligned}$$

welche der Reihe nach ausdrücken, dass die Tangente des schiefen Schnittes im Punkte p senkrecht steht auf der Normale (32), auf der Normale der Oberfläche und auf der Normale der die Oberfläche schneidenden Ebene $A_1 = o$. Da alle drei Gleichungen zugleich stattfinden, so lassen sich zwei Factoren m und n bestimmen der Gestalt, dass man hat:

$$\begin{aligned} A &= m u_0 + n \alpha_1, \\ B &= m u_1 + n \beta_1, \\ C &= m u_2 + n \gamma_1. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe von A, B, C in den angegebenen Ausdruck des Krümmungsradius ϱ ein, und bemerken, dass man hat;

$$\alpha_1 x'' + \beta_1 y'' + \gamma_1 z'' = o,$$

welche Gleichung aus der in t identischen Gleichung:

$$A_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = o$$

durch zweimalige Differentiation gewonnen wird, so erhalten wir:

$$\varrho = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{m(u_0 x'' + u_1 y'' + u_2 z'')},$$

oder mit Rücksicht auf (22):

$$\varrho = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{m\,\varphi(x', y', z')},$$

oder endlich mit Rücksicht auf (23) und der ihr vorhergehenden Gleichung:

$$\varrho = \frac{1}{m\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Es bleibt noch übrig, den Werth von m in dieser Gleichung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir obige drei Gleichungen, in welche die Factoren m und n eingeführt wurden, respective mit A, B, C und addiren, wobei der Factor von n verschwindet, und erhalten:

$$1 = m(u_0 A + u_1 B + u_2 C).$$

Da aber der cos $(r\varrho)$ des Winkels, den der Krümmungsradius r mit dem Krümmungsradius ϱ bildet, ist:

$$\cos(r\varrho) = \frac{u_0 A + u_1 B + u_2 C}{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}},$$

so haben wir:

$$\frac{1}{m} = \cos(r\varrho)\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}.$$

Setzen wir endlich diesen Werth für $\frac{1}{m}$ in den zuletzt angegebenen Werth des Krümmungsradius ϱ und vergleichen letzteren mit (24), so erhalten wir:

$$(33) \quad \varrho = r\cos(r\varrho).$$

Da nun der Neigungswinkel der beiden Krümmungsradien zugleich der Neigungswinkel der Ebene des Normalschnittes und der Ebene des schiefen Schnittes ist, so drückt die Gleichung (33) den Satz aus:

Die senkrechte Projection des Krümmungsmittelpunktes eines Normalschnittes in einem gegebenen Punkte einer Oberfläche auf einen schiefen Schnitt der Oberfläche, der dieselbe Tangente in dem gegebenen Punkte hat als der Normalschnitt, ist der Krümmungsmittelpunkt des schiefen Schnittes.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Krümmungscurven der Oberflächen.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes einer gegebenen Oberfläche $u = o$ in einem gegebenen Punkte p derselben als denjenigen Halbmesser des durch die Gleichungen (25) und (26):

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) - \sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)} = o,$$

$$(2) \quad u_0 x + u_1 y + u_2 z = o$$

gegebenen Kegelschnittes dargestellt, der den Normalschnitt in dem gegebenen Punkte p berührt. Diese Darstellungsweise haben wir dazu benutzt, um Sätze über Halbmesser eines Kegelschnittes auf Krümmungsradien der Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben zu übertragen. Der bedeutendste Satz über die Halbmesser eines Kegelschnittes ist der, „dass die Maxima oder Minima der Halbmesser eines Kegelschnittes die halben Hauptaxen desselben sind und dass diese auf einander senkrecht stehen.“ Uebertragen wir diesen Satz nach dem angegebenen Prinzipe auf die Krümmungsradien der Normalschnitte, so geht daraus der Satz hervor:

Die Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben, deren Krümmungsradien Maxima oder Minima sind, stehen auf einander senkrecht.

Wir werden diesen, in der Theorie der Oberflächen wichtigsten, Satz noch besonders beweisen mit Hülfe der Regeln für die Herleitung der Maxima und Minima der Functionen, wie sie die Differentialrechnung lehrt.

Zu diesem Zwecke suchen wir das Maximum oder Minimum des in der vorhergehenden Vorlesung in (24) ausgedrückten Krümmungsradius r des Normalschnittes:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} .$$

Da der Zähler dieses Ausdruckes eine Constante ist, die nur abhängt von der Lage des unveränderlichen Punktes p auf der gegebenen Oberfläche, so wird r ein Maximum oder Minimum nur wenn $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ein Minimum oder Maximum wird. Es handelt sich also darum, die Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ der variabeln Cosinus α, β, γ der Tangente des Normalschnittes zu einem Minimum oder Maximum zu machen, während zwischen den genannten Cosinus die beiden Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = o ,$$

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = o .$$

Um diese Aufgabe zu lösen, schreibt die Differentialrechnung vor, aus der gegebenen Function und aus den, respective mit $-\lambda$ und 2μ multiplicirten, linken Theilen der beiden Bedingungsgleichungen den Ausdruck zu bilden:

$$(6) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) + 2\mu\,(u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma) ,$$

und das Minimum oder Maximum dieses Ausdruckes so zu bestimmen, als ob sowohl α, β, γ als auch λ und μ von einander unabhängige Variable wären. Die Werthe der Variabeln, welche die componirte Function (6) zu einem Minimum oder Maximum machen, machen dann auch die Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ unter den Bedingungen (4) und (5) zu einem Minimum oder Maximum.

Setzen wir nun, um das Minimum oder Maximum der Function (6) nach den bekannten Regeln festzustellen, die partiellen Differentialquotienten der Function (6) nach den 5 Variabeln genommen gleich o, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(7) \ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} \varphi'(\alpha) - 2\lambda\alpha + 2\mu u_0 = o, \\ \varphi'(\beta) - 2\lambda\beta + 2\mu u_1 = o, \\ \varphi'(\gamma) - 2\lambda\gamma + 2\mu u_2 = o, \\ u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = o, \end{array}$$

und die Gleichung (4), welche zur Bestimmung der Werthe der 5 Variabeln dienen.

Entwickeln wir das in Beziehung auf die Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ lineare homogene System Gleichungen (7):

$$(8) \ldots \begin{array}{l} (u_{00} - \lambda)\alpha + u_{01}\beta + u_{02}\gamma + u_0\mu = o, \\ u_{10}\alpha + (u_{11} - \lambda)\beta + u_{12}\gamma + u_1\mu = o, \\ u_{20}\alpha + u_{21}\beta + (u_{22} - \lambda)\gamma + u_2\mu = o, \\ u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = o, \end{array}$$

und eliminiren die genannten Unbekannten, so erhalten wir die in λ quadratische Gleichung:

$$(9) \ldots\ldots \begin{vmatrix} u_{00} - \lambda, & u_{01}, & u_{02}, & u_0 \\ u_{10}, & u_{11} - \lambda, & u_{12}, & u_1 \\ u_{20}, & u_{21}, & u_{22} - \lambda, & u_2 \\ u_0, & u_1, & u_2, & o \end{vmatrix} = o,$$

welche den Beweis liefert, dass die Krümmungsradien der Normalschnitte zwei Maxima oder Minima haben.

Durch die Wurzeln dieser Gleichung drücken sich nun sogleich die Maxima oder Minima der Krümmungsradien der Normalschnitte aus. Denn multipliciren wir die drei ersten Gleichungen (7) respective mit α, β, γ und addiren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die letzte Gleichung:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda = o,$$

und daher aus (3) das Maximum oder Minimum des Krümmungsradius:

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)}}{\lambda}.$$

Hat man den Werth einer Wurzel λ der quadratischen Gleichung (9) ermittelt und damit zugleich das Maximum oder Mini-

mum des Krümmungsradius (10) bestimmt, so erhält man aus den drei ersten Gleichungen (8) in linearer Weise die Verhältnisse $\frac{\alpha}{\mu}, \frac{\beta}{\mu}, \frac{\gamma}{\mu}$ der Cosinus der Winkel, welche die Tangente des, dem Maximum oder Minimum des Krümmungsradius entsprechenden, Normalschnittes mit den Coordinatenaxen bildet, und die Gleichung (3) giebt die Cosinus selbst.

Um die Lage der beiden Normalschnitte zu einander, welche dem Maximum oder Minimum des Krümmungsradius entsprechen, zu ermitteln, wollen wir annehmen, dass λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung (9) seien. Der ersten Wurzel mögen die Werthe $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mu_1$, der zweiten die Werthe $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \mu_2$ von $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ entsprechen, welche deshalb in (7) eingesetzt diesen Gleichungen genügen:

$$(11)\quad \begin{array}{ll} \varphi'(\alpha_1) - 2\lambda_1\alpha_1 + 2\mu_1 u_0 = o, & \varphi'(\alpha_2) - 2\lambda_2\alpha_2 + 2\mu_2 u_0 = o, \\ \varphi'(\beta_1) - 2\lambda_1\beta_1 + 2\mu_1 u_1 = o, & \varphi'(\beta_2) - 2\lambda_2\beta_2 + 2\mu_2 u_1 = o, \\ \varphi'(\gamma_1) - 2\lambda_1\gamma_1 + 2\mu_1 u_2 = o, & \varphi'(\gamma_2) - 2\lambda_2\gamma_2 + 2\mu_2 u_2 = o, \\ u_0\alpha_1 + u_1\beta_1 + u_2\gamma_1 = o. & u_0\alpha_2 + u_1\beta_2 + u_2\gamma_2 = o. \end{array}$$

Multipliciren wir nun die drei ersten Gleichungen des ersten Systemes respective mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und addiren, multipliciren wir ferner die drei ersten Gleichungen des zweiten Systemes respective mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und addiren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die unbenutzt gelassenen Gleichungen:

$$\alpha_2\varphi'(\alpha_1) + \beta_2\varphi'(\beta_1) + \gamma_2\varphi'(\gamma_1) = 2\lambda_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$
$$\alpha_1\varphi'(\alpha_2) + \beta_1\varphi'(\beta_2) + \gamma_1\varphi'(\gamma_2) = 2\lambda_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$

Ziehen wir endlich diese beiden Gleichungen, deren linke Theile einander gleich sind, von einander ab, so erhalten wir.

$$o = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$

Da nun der erste Factor des rechten Theiles dieser Gleichung nicht verschwinden kann, weil λ_1 und λ_2 verschiedene Wurzeln der quadratischen Gleichung (9) sind, so hat man die Gleichung:

$$(12)\quad \ldots\ldots\ldots \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = o.$$

Aus der geometrischen Interpretation dieser Gleichung geht eben der oben angeführte Satz hervor.

Die Normalschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben, deren Krümmungsradien Maxima oder Minima sind, nennt man **Hauptschnitte** der Oberfläche in dem gegebenen Punkte. Auf Grund dieser Definition lässt sich der angegebene Satz auch so ausdrücken:

Die Hauptschnitte einer Oberfläche in einem gegebenen Punkte derselben stehen auf einander senkrecht.

Aus den Bedingungsgleichungen (7) für die Cosinus α, β, γ der Winkel, welche die Tangenten der Hauptschnitte mit den Coordinatenaxen bilden, gehen durch Elimination von λ und μ die Gleichungen hervor:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \varphi'(\alpha), & \varphi'(\beta), & \varphi'(\gamma) \end{vmatrix} = o,$$

$$(14) \quad u_0\alpha + u_1\beta + u_2\gamma = o,$$

welchen jene Cosinus ebenfalls genügen müssen.

Die erste von diesen Gleichungen stellt, wenn man α, β, γ als die Coordinaten eines Punktes betrachtet in einem Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Punkt p ist, einen Kegel zweiter Ordnung dar mit der Spitze in p, in welchem die Tangenten der Hauptschnitte liegen. Die zweite Gleichung ist die Gleichung der Tangentenebene der Oberfläche im Punkte p. Es schneidet daher die Ebene den Kegel in den beiden auf einander senkrecht stehenden Tangenten der Hauptschnitte in dem Punkte p.

Auf diese Bemerkung gestützt werden wir nun die Bedingungen für eine Curve auf der gegebenen Oberfläche $u = o$ entwickeln, deren Tangenten sämmtlich Tangenten der Hauptschnitte der Oberfläche sind.

Es sei p irgend ein Punkt dieser Curve, dessen Coordinaten:

$$p) \quad x, \quad y, \quad z$$

wir als zu bestimmende Functionen der einzigen unabhängigen Variabeln t betrachten. Die Coordinaten eines diesem Punkte unendlich nahen Punktes q auf der Curve seien in dieser Voraussetzung:

$$q) \quad x + x'dt, \quad y + y'dt, \quad z + z'dt.$$

Die Differenzen:

$$dx = x'dt, \quad dy = y'dt, \quad dz = z'dt$$

sind dann die Coordinaten des Punktes q in einem Coordinatensystem, dessen Ursprung im Punkte p liegt. Da nun dieser Punkt auf der Tangente des Hauptschnittes im Punkte p liegen soll, so muss die Gleichung (13) erfüllt werden, wenn man in ihr für α, β, γ setzt dx, dy, dz. Man hat daher die Differentialgleichung:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ \varphi'(dx), & \varphi'(dy), & \varphi'(dz) \end{vmatrix} = o$$

als Bedingung für die gesuchte Curve.

Krümmungscurve einer Oberfläche wird diejenige Curve auf der Oberfläche genannt, deren Tangenten sämmtlich Tangenten der Hauptschnitte der Oberfläche sind. Ist demnach $u = o$ die Gleichung einer gegebenen Oberfläche, so ist die Gleichung (15) in Verbindung mit der Gleichung der gegebenen Oberfläche die Differentialgleichung der Krümmungscurve auf ihr.

Man erhält die Gleichung einer Oberfläche, welche die gegebene Oberfläche in ihrer Krümmungscurve schneidet, wenn man die Differentialgleichung der Krümmungscurve mit Benutzung der Gleichung der gegebenen Oberfläche integrirt. Da die Integralgleichung aber eine willkürliche Constante mit sich führt, so giebt es unendlich viele Krümmungscurven einer gegebenen Oberfläche.

Die Differentialgleichung (15) der Krümmungscurve ist zwar von der ersten Ordnung, jedoch von dem zweiten Grade. Deshalb hat man zwei Systeme Krümmungscurven auf einer gegebenen Oberfläche, deren Hauptcharakter aus ihrer Construction durch die Tangenten der Hauptschnitte erkennbar ist. Denn betrachten wir die beiden Krümmungscurven, welche durch einen beliebig auf der gegebenen Oberfläche gewählten Punkt gehen, so ist die Tangente der einen Krümmungscurve die Tangente des einen Hauptschnittes, und die Tangente der anderen Krümmungscurve ist die Tangente des anderen Hauptschnittes. Da diese Tangenten aber auf einander senkrecht stehen, so haben wir den Satz:

Die Krümmungscurven einer Oberfläche sind zweifacher Art. Die einen schneiden die anderen senkrecht.

Deshalb wird eine Oberfläche in ihrer ganzen Ausdehnung durch die stetige Aufeinanderfolge der beiden Arten Krümmungscurven auf ihr in unendlich kleine Rechtecke zertheilt.

Wenn die Oberfläche zweiter Ordnung ist, so lässt sich die Integration der Differentialgleichung ihrer Krümmungscurven wirklich durchführen. Wir werden im Folgenden diese Integration ausführen, um die in der zweiundzwanzigsten Vorlesung gegebene Definition der Krümmungscurven auf Oberflächen zweiter Ordnung mit der allgemeinen auf Oberflächen überhaupt in Uebereinstimmung zu bringen.

Vertauschen wir in dieser Absicht die Buchstaben x, y, z mit den Buchstaben $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, und nehmen an, dass die gegebene Oberfläche $u = o$ ein Ellipsoid sei:

$$\frac{\beta_0^2}{\alpha_0 + \lambda_0} + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_0} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_0} - 1 = o,$$

so wird die durch 4 dividirte Differentialgleichung (15) der Krümmungscurven auf demselben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \\ d\beta_0, & d\beta_1, & d\beta_2 \\ \frac{d\beta_0}{\alpha_0 + \lambda_0}, & \frac{d\beta_1}{\alpha_1 + \lambda_0}, & \frac{d\beta_2}{\alpha_2 + \lambda_0} \end{vmatrix} = o,$$

eine Gleichung, welche, nach (45) der zweiundzwanzigsten Vorlesung durch elliptische Coordinaten ausgedrückt, übergeht in:

$$Q\left\{(\lambda_1 - \lambda_2) B_0^2 d\lambda_1 d\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_0) B_1^2 d\lambda_2 d\lambda_0 + (\lambda_0 - \lambda_1) B_2^2 d\lambda_0 d\lambda_1\right\} = o,$$

Da nun λ^0 eine gegebene constante Grösse ist, so ist $d\lambda_0 = o$, und die zuletzt angegebene Differentialgleichung reducirt sich auf:

$$d\lambda_1 d\lambda_2 = o,$$

welche integrirt giebt:

$$\lambda_1 = C_1 \text{ oder } \lambda_2 = C_2.$$

Dieses sind aber die Gleichungen der mit dem gegebenen Ellipsoid confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, welche das Ellip-

soid nach der erweiterten Definition der Krümmungscurven auf Oberflächen in den Krümmungscurven schneiden. In gleicher Weise führt die Differentialgleichung der Krümmungscurven auf einem der beiden Hyperboloide, ausgedrückt durch elliptische Coordinaten und integrirt, auf die mit ihnen confocalen Oberflächen. Wir können daher mit Recht die Krümmungscurven auf Oberflächen zweiter Ordnung, wie in der zweiundzwanzigsten Vorlesung geschehen ist, als die Schnittcurven confocaler Oberflächen zweiter Ordnung erklären.

Monge nennt Krümmungscurven auf einer gegebenen Oberfläche die stetige Aufeinanderfolge von Punkten, für welche die unendlich nahen Normalen der Oberfläche sich schneiden. Wir werden durch den Calcul nachweisen, dass diese Art Curven mit den in dem Vorhergehenden definirten Krümmungscurven zusammenfallen.

Wenn wir mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes p auf der gegebenen Oberfläche $u = o$ bezeichnen, so haben wir die Gleichungen der Normale in diesem Punkte:

$$(16) \quad \begin{aligned} x - a &= \mu u_0, \\ y - b &= \mu u_1, \\ z - c &= \mu u_2. \end{aligned}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen für x, y, z die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ eines dem Punkte p unendlich nahe liegenden Punktes q der Oberfläche, so werden die Gleichungen der Normale in dem Punkte q:

$$(17) \quad \begin{aligned} x + dx - a &= \nu(u_0 + du_0), \\ y + dy - b &= \nu(u_1 + du_1), \\ z + dz - c &= \nu(u_2 + du_2), \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, dass durch jene Substitution μ in ν übergehe.

Sollen sich diese beiden Normalen schneiden, so müssen gewisse Werthe von a, b, c den beiden Systemen Gleichungen zu gleicher Zeit genügen. Zieht man daher unter der Voraussetzung,

dass a, b, c diese Werthe haben, dass erste System Gleichungen von dem zweiten ab, so erhält man die Bedingungsgleichungen für den Punkt q:

$$dx + (\mu - \nu)u_0 - \nu du = o,$$
$$dy + (\mu - \nu)u_1 - \nu du_1 = o,$$
$$dz + (\mu - \nu)u_2 - \nu du_2 = o,$$

aus welchen durch Elimination der Unbekannten $(\mu - \nu)$ und $-\nu$ die Differentialgleichung der Curven von Monge hervorgeht:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ du_0, & du_1, & du_2 \end{vmatrix} = o.$$

Bemerkt man aber, dass mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von dx, dy, dz ist:

$$(19) \quad \begin{aligned} du_0 &= u_{00}dx + u_{01}dy + u_{02}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dx), \\ du_1 &= u_{10}dx + u_{11}dy + u_{12}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dy), \\ du_2 &= u_{20}dx + u_{21}dy + u_{22}dz = \tfrac{1}{2}\varphi'(dz), \end{aligned}$$

so sieht man, dass die Differentialgleichung (15) der Krümmungscurven mit der Differentialgleichung (18) der Curven von Monge vollkommen übereinstimmt.

Dreissigste Vorlesung.

Das Theorem von Dupin.

In der vorhergehenden Vorlesung haben wir durch den Calcul nachgewiesen, dass sich die drei Systeme confocaler Oberflächen zweiter Ordnung in ihren Krümmungscurven schneiden. Diese drei Systeme Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich senkrecht. Die Erörterung der Frage, ob diese drei Systeme Oberflächen zweiter Ordnung sich in ihren Krümmungscurven schneiden, weil sie sich senkrecht schneiden, und die Erweiterung der Frage auf allgemeine Oberflächen führt zu dem Theorem von Dupin:

Wenn drei Systeme Oberflächen so beschaffen sind, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Oberfläche aus jedem der drei Systeme hindurchgeht, und wenn sich jene drei durch den beliebigen Punkt des Raumes gelegten Oberflächen immer senkrecht schneiden, so schneiden sich die drei Systeme Oberflächen gegenseitig in ihren Krümmungscurven.

Aus diesem Theorem folgt dann ohne Weiteres, dass die drei Systeme confocaler Oberflächen zweiter Ordnung sich gegenseitig in ihren Krümmungscurven schneiden, weil sie sich senkrecht schneiden.

Wir werden die Bedingungen des Theoremes analytisch feststellen, hierauf aus den Bedingungen weitere Folgerungen ziehen und letztere dazu benutzen, um das Theorem selbst zu beweisen.

Ein System Oberflächen ist im Allgemeinen durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes und einer willkürlichen Constante gegeben. Diese Gleichung können wir uns nach der willkürlichen Constante aufgelöset denken, und demnach annehmen, dass die drei Systeme Oberflächen durch ihre Gleichungen in der aufgelösten Form gegeben seien:

(1) . . . . $u = \lambda^0, \quad v = \lambda', \quad w = \lambda''$,

indem wir unter u, v, w irgend welche Functionen der Coordinaten x, y, z verstehen und unter λ^0, λ', λ'' willkürliche Constanten.

In dieser Voraussetzung sind die Bedingungen des Theoremes:

$$
\begin{aligned}
& v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 = o, \\
(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad & w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 = o, \\
& u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 = o,
\end{aligned}
$$

wenn wir mit u_0, u_1, u_2 . . . die partiellen Differentialquotienten der Functionen u . . . nach den Variabeln x, y, z bezeichnen.

Es sind diese Gleichungen identische Gleichungen, weil sie ausdrücken, dass die Normalen der drei durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehenden Oberflächen in diesem Punkte auf einander senkrecht stehen. Man kann daher jede von diesen Gleichungen partiell nach einer der Variabeln differenziren, wodurch man wieder identische Gleichungen erhält.

Aus der ersten von diesen Gleichungen geht, wenn man mit $u_{\varkappa\lambda}$, $v_{\varkappa\lambda}$, $w_{\varkappa\lambda}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Functionen u, v, w bezeichnet, folgendes System hervor:

$$
\begin{aligned}
(v_{00} w_0 + v_{10} w_1 + v_{20} w_2) + (w_{00} v_0 + w_{10} v_1 + w_{20} v_2) &= o, \\
(v_{01} w_0 + v_{11} w_1 + v_{21} w_2) + (w_{01} v_0 + w_{11} v_1 + w_{21} v_2) &= o, \\
(v_{02} w_0 + v_{12} w_1 + v_{22} w_2) + (w_{02} v_0 + w_{12} v_1 + w_{22} v_2) &= o.
\end{aligned}
$$

Zwei andere Systeme Gleichungen erhält man auf gleiche Weise durch Differentiation der zweiten und dritten Gleichung (2).

Um diese drei Systeme identischer Gleichungen in einer übersichtlichen Form darzustellen, führen wir nach der Analogie von (21) der achtundzwanzigsten Vorlesung die Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
& \varphi(a_0, a_1, a_2) = u_{00} a_0^2 + u_{11} a_1^2 + u_{22} a_2^2 + 2u_{12} a_1 a_2 + 2u_{20} a_2 a_0 + 2u_{01} a_0 a_1, \\
(3) \quad & \psi(a_0, a_1, a_2) = v_{00} a_0^2 + v_{11} a_1^2 + v_{22} a_2^2 + 2v_{12} a_1 a_2 + 2v_{20} a_2 a_0 + 2v_{01} a_0 a_1, \\
& \chi(a_0, a_1, a_2) = w_{00} a_0^2 + w_{11} a_1^2 + w_{22} a_2^2 + 2w_{12} a_1 a_2 + 2w_{20} a_2 a_0 + 2w_{01} a_0 a_1,
\end{aligned}
$$

mit deren Hülfe wir jene drei Systeme identischer Gleichungen nach Multiplication mit dem Factor 2 also darstellen:

$$\psi'(w_0) + \chi'(v_0) = o,$$
$$\psi'(w_1) + \chi'(v_1) = o,$$
$$\psi'(w_2) + \chi'(v_2) = o,$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \chi'(u_0) + \varphi'(w_0) = o,$$
$$\chi'(u_1) + \varphi'(w_1) = o,$$
$$\chi'(u_2) + \varphi'(w_2) = o,$$

$$\varphi'(v_0) + \psi'(u_0) = o,$$
$$\varphi'(v_1) + \psi'(u_1) = o,$$
$$\varphi'(v_2) + \psi'(u_2) = o.$$

Wir führen ferner, um abzukürzen, die Bezeichnungen ein:

$$\Phi(v, w) = v_0\varphi'(w_0) + v_1\varphi'(w_1) + v_2\varphi'(w_2),$$
$$(5) \ldots\ldots \Psi(w, u) = w_0\psi'(u_0) + w_1\psi'(u_1) + w_2\psi'(u_2),$$
$$X(u, v) = u_0\chi'(v_0) + u_1\chi'(v_1) + u_2\chi'(v_2),$$

wobei zu bemerken ist, dass:

$$(6) \quad \Phi(v, w) = \Phi(w, v), \quad \Psi(w, u) = \Psi(u, w), \quad X(u, v) = X(v, u).$$

Aus den Gleichungen (4) setzen wir nun folgende zusammen:

$$\Psi(w, u) + X(v, u) = o,$$
$$(7) \ldots\ldots X(u, v) + \Phi(w, v) = o.$$
$$\Phi(v, w) + \Psi(u, w) = o.$$

Die erste von diesen Gleichungen erhält man nämlich, wenn man die drei Gleichungen des ersten Systemes (4) der Reihe nach mit u_0, u_1, u_2 multiplicirt und addirt und so weiter.

Addirt man zwei von diesen Gleichungen und zieht die dritte ab, so erhält man:

$$(8) \ldots \Phi(v, w) = o, \quad \Psi(w, u) = o, \quad X(u, v) = o.$$

Diese drei Gleichungen zugleich mit den drei Bedingungsgleichungen (2) des oben angegebenen Theoremes werden nun dazu dienen dasselbe zu beweisen.

Den Beweis des Theoremes werden wir in der Weise führen, dass wir zeigen, wie die Gleichungen:

$$(9) \ldots\ldots u = \lambda^0, \quad v = \lambda',$$

welche den Gleichungen (2) und deshalb den Gleichungen (8) genügen, auch der Differentialgleichung (15) in der vorhergehenden Vorlesung der Krümmungscurve der ersten Oberfläche $u = \lambda^0$ genügen.

Wenn wir demnach mit K den Ausdruck bezeichnen:

$$(10) \ldots\ldots K = \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ dx, & dy, & dz \\ \varphi'(dx), & \varphi'(dy), & \varphi'(dz) \end{vmatrix},$$

der entwickelt die Gestalt annimmt:

$$(11)\ K = (u_1 dz - u_2 dy)\varphi'(dx) + (u_2 dx - u_0 dz)\varphi'(dy) + (u_0 dy - u_1 dx)\varphi'(dz),$$

so werden wir nachzuweisen haben, dass unter Voraussetzung der angeführten Gleichungen (9), (2) und (8) dieser Ausdruck K verschwindet.

Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (9), so erhalten wir:

$$u_0 dx + u_1 dy + u_2 dz = o,$$
$$v_0 dx + v_1 dy + v_2 dz = o,$$

zwei Gleichungen, welche, mit den beiden ersten Gleichungen (2):

$$u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 = o,$$
$$v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 = o$$

verglichen, beweisen, dass $dx : dy : dz = w_0 : w_1 : w_2$ oder dass:

$$dx = \lambda w_0, \quad dy = \lambda w_1, \quad dz = \lambda w_2.$$

Setzen wir die Werthe in den Ausdruck (11), so erhalten wir:

$$\frac{K}{\lambda^2} = (u_1 w_2 - u_2 w_1)\varphi'(w_0) + (u_2 w_0 - u_0 w_2)\varphi'(w_1) + (u_0 w_1 - u_1 w_0)\varphi'(w_2).$$

Bestimmen wir endlich die Verhältnisse von $v_0 : v_1 : v_2$ aus der ersten und letzten Gleichung (2), oder mit Einführung eines unbestimmten Factors μ jene Grössen selbst:

$$u_1 w_2 - u_2 w_1 = \mu v_0, \quad u_2 w_0 - u_0 w_2 = \mu v_1, \quad u_0 w_1 - u_1 w_0 = \mu v_2,$$

und setzen diese Werthe in den zuletzt gegebenen Ausdruck für $\frac{K}{\lambda^2}$ ein, so wird auf Grund der Bezeichnungen (5):

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots K = \mu \lambda^2 \Phi(v, w).$$

Da aber nach (8) $\Phi(v, w)$ verschwindet, so verschwindet auch K.

Wir gehen schliesslich noch einen zweiten Beweis des Dupinschen Theoremes gestützt auf Coordinatentransformation.

Wir gehen wieder von den drei Systemen Oberflächen (1) aus, welche den Bedingungen (2) des Theoremes genügen, woraus die Gleichungen (8) eine unmittelbare Folge sind. Wir betrachten aber in den Gleichungen (1) die willkürlichen Constanten λ^0, λ', λ'' als die Coordinaten desjenigen Punktes, im Raume, dem die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Gleichungen (1) entsprechen, und stellen den Ausdruck (10) K, der gleich o gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungscurve der gegebenen Oberfläche $u = \lambda^0$ ist, als eine Function der Coordinaten λ^0, λ', λ'' und ihrer Differentialen $d\lambda^0$, $d\lambda'$, $d\lambda''$ dar. Wenn wir diesen so transformirten Ausdruck K gleich o setzen, so erhalten wir die Differentialgleichung der Krümmungscurven auf der gegebenen Oberfläche in einer integrirbaren Form, und können daraus die Gleichungen der Oberflächen selbst ableiten, welche die gegebene Oberfläche in ihren Krümmungscurven schneidet. Es wird sich dann zeigen, dass die hergeleiteten Oberflächen gerade diejenigen sind, die durch die Gleichungen $v = \lambda'$ und $w = \lambda''$ mit den willkürlichen Constanten λ' und λ'' analytisch ausgedrückt werden.

Die drei Gleichungen (1) geben nach den rechtwinkligen Coordinaten aufgelöset die Werthe derselben als Functionen von λ^0, λ', λ''. Differenziren wir diese Gleichungen, um auch die Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten auszudrücken, so erhalten wir:

$$(13) \quad \begin{aligned} u_0 dx + u_1 dy + u_2 dz &= d\lambda^0, \\ v_0 dx + v_1 dy + v_2 dz &= d\lambda', \\ w_0 dx + w_1 dy + w_2 dz &= d\lambda''. \end{aligned}$$

Dieses System von linearen Gleichungen haben wir nach dx, dy, dz aufzulösen. Wir behaupten, dass die aufgelösten Gleichungen folgende sind:

$$(14) \quad \begin{aligned} dx &= u_0 \frac{d\lambda^0}{U} + v_0 \frac{d\lambda'}{V} + w_0 \frac{d\lambda''}{W}, \\ dy &= u_1 \frac{d\lambda^0}{U} + v_1 \frac{d\lambda'}{V} + w_1 \frac{d\lambda''}{W}, \\ dz &= u_2 \frac{d\lambda^0}{U} + v_2 \frac{d\lambda'}{V} + w_2 \frac{d\lambda''}{W}, \end{aligned}$$

wenn wir, um abzukürzen, setzen:

$$(15) \ldots\ldots\quad \begin{aligned} U &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2,\\ V &= v_0^2 + v_1^2 + v_2^2,\\ W &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2. \end{aligned}$$

Denn setzt man die Werthe von dx, dy, dz aus (14) in (13) ein, und vergleicht auf beiden Seiten der Gleichungen die Coefficienten von $d\lambda^0$, $d\lambda'$, $d\lambda''$, so erhält man neun Bedingungsgleichungen, von welchen drei von selber erfüllt werden, während die sechs anderen mit den Gleichungen (2) übereinstimmen.

Um nun die Determinante (10) K mit Hülfe von (14) leichter zu transformiren, bilden wir die Determinante D:

$$(16) \ldots\ldots\quad D = \begin{vmatrix} u_0, & u_1, & u_2 \\ v_0, & v_1, & v_2 \\ w_0, & w_1, & w_2 \end{vmatrix},$$

und stellen das Product KD beider Determinanten als eine Determinante dar, welche mit Rücksicht auf (15), (13) und (2) die Gestalt erhält:

$$KD = \begin{vmatrix} U, & 0, & 0, \\ d\lambda^0, & d\lambda', & d\lambda'', \\ dx\,\varphi'(u_0) + dy\,\varphi'(u_1) + dz\,\varphi'(u_2), & dx\,\varphi'(v_0) + dy\,\varphi'(v_1) + dz\,\varphi'(v_2), & dx\,\varphi'(w_0) + dy\,\varphi'(w_1) + dz\,\varphi'(w_2) \end{vmatrix},$$

oder kürzer:

$$(17)\quad U \begin{vmatrix} d\lambda', & d\lambda'' \\ dx\,\varphi'(v_0) + dy\,\varphi'(v_1) + dz\,\varphi'(v_2), & dx\,\varphi'(w_0) + dy\,\varphi'(w_1) + dz\,\varphi'(w_2) \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir, um dieses Product weiter zu vereinfachen, die Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\varphi'(v_0)$, $\varphi'(v_1)$, $\varphi'(v_2)$, oder mit $\varphi'(w_0)$, $\varphi'(w_1)$, $\varphi'(w_2)$, und addiren, so erhalten wir auf Grund der Gleichungen (8) und mit Rücksicht auf die Bezeichnungen (5):

$$dx\,\varphi'(v_0) + dy\,\varphi'(v_1) + dz\,\varphi'(v_2) = \frac{\Phi(v,v)}{V}\,d\lambda' + \frac{\Phi(u,v)}{U}\,d\lambda^0,$$

$$dx\,\varphi'(w_0) + dy\,\varphi'(w_1) + dz\,\varphi'(w_2) = \frac{\Phi(w,w)}{W}\,d\lambda'' + \frac{\Phi(u,w)}{U}\,d\lambda^0,$$

wodurch der Ausdruck (17) übergeht in:

$$KD = U \begin{vmatrix} d\lambda', & d\lambda'' \\ \frac{\Phi(v,v)}{V} d\lambda' + \frac{\Phi(u,v)}{U} d\lambda^0, & \frac{\Phi(w,w)}{W} d\lambda'' + \frac{\Phi(u,w)}{U} d\lambda^0 \end{vmatrix}.$$

oder:

$$(18)\quad KD = U \left\{ \frac{\Phi(w,w)}{W} - \frac{\Phi(v,v)}{V} \right\} d\lambda' d\lambda'' + \left\{ \Phi(u,w) d\lambda' - \Phi(u,v) d\lambda'' \right\} d\lambda^0.$$

Hiernach geht die Differentialgleichung $K = o$ der Krümmungscurven der Oberflächen $u = \lambda^0$, für welche λ^0 eine Constante ist, über in:

$$(19)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\lambda' \, d\lambda'' = o,$$

welche Gleichung integrirt giebt λ' oder λ'' gleich einer willkürlichen Constanten.

